Dies ist die Übungsklausur für die Analysis 1.

Anleitung:
Sie können damit im Selbsttest die Klausur für den Ernstfall proben. Nehmen Sie sich 3 Stunden Zeit und versuchen, in dieser Zeit die Aufgaben zu lösen. Drucken Sie dafür vorher diese Datei aus, ohne auf die folgenden Seiten zu schauen.

Falls Sie die Klausur einfach nur für sich lösen möchten, können Sie natürlich gleich auf die Aufgaben schauen, die Sie auf den folgenden Seiten dieser Datei finden.

Ihre Lösungen können Sie nach Absprache mit Ihrem Tutor oder Ihrer Tutorin zur Korrektur abgeben, spätestens aber bis zur Besprechung der Lösung in den Übungsgruppen am 10. und 11. Januar 2012 nach der Weihnachtspause. Für die richtigen Lösungen bekommen Sie Bonus-Übungspunkte gutgeschrieben, pro richtig gelöster Aufgabe gibt es einen Bonuspunkt (also maximal 10 Bonus-Ü).

Ihnen allen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Start ins neue Jahr 2012!

Prof. Dr. J. Lohkamp
PD Dr. K. Halupczok

Universität Münster
Wintersemester 2011/12

Analysis 1

Übungsklausur

Name, Vorname: ....

Matrikel-Nr: ....

Studiengang: ....

Bepunktung der multiple choice-Fragen M1 bis M7: Jede richtig beantwortete wahr/falsch-Teilaufgabe gibt einen Punkt, jede falsch beantwortete gibt einen Punkt Abzug. Unbeantwortete wahr/falsch-Teilaufgaben geben weder Punkte noch Abzug. Insgesamt kann aber keine Aufgabe negative Punkte geben, auch wenn mehr Teilaufgaben falsch als richtig beantwortet wurden.

Dauer der Klausur: 3 Stunden

- Lösen Sie, wenn möglich, die Aufgaben A1, A2 und A3 auf dem entsprechenden Blatt.
- Versehen Sie bitte auch alle zusätzlichen Blätter mit Ihrem Namen und Matrikel-Nr.
- Ihre Antworten im multiple choice-Teil markieren Sie bitte so mit einem Kreuz: $\boxtimes$

Multiple choice-Teil, zählt 70% :

Aufgabe	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	Σ
Punkte								

Aufgaben-Teil, zählt 30% :

Aufgabe	A1	A2	A3	Σ
Punkte				

Gesamt-Punktzahl: Zensur:

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Multiple choice-Teil

Aufgabe M1. Wahr oder Falsch?

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.
wahr ☐ *falsch* ☒

(b) Wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ gibt mit $0 \leq q \leq 1$, so dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_{k+1}| \leq q|a_k|$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.
wahr ☐ *falsch* ☒

(c) Jede monoton fallende, beschränkte Folge ist konvergent.
wahr ☒ *falsch* ☐

(d) Es gibt eine konvergente Folge, die nur endlich viele Werte annimmt.
wahr ☒ *falsch* ☐

(e) Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.
wahr ☒ *falsch* ☐

(f) Folgt aus der folgenden Bedingung die Konvergenz der Folge (a_j) gegen c?
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele j mit $|a_j - c| > \varepsilon$.
wahr ☒ *falsch* ☐

(g) Eine Folge mit einer konvergenten Majorante konvergiert und eine Folge mit einer divergenten Majorante divergiert.
wahr ☐ *falsch* ☒

(h) Jede monoton fallende Folge ist eine Nullfolge.
wahr ☐ *falsch* ☒

Aufgabe M2. Kreuzen Sie zutreffende Aussagen an.

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ ist

Quot-Krit. gilt: $\frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

- konvergent *wahr* ☒ *falsch* ☐
- alternierend *wahr* ☐ *falsch* ☒
- absolut konvergent *wahr* ☒ *falsch* ☐
- bestimmt divergent *wahr* ☐ *falsch* ☒

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist

- konvergent *wahr* ☒ *falsch* ☐
- monoton *wahr* ☒ *falsch* ☐
- absolut konvergent *wahr* ☒ *falsch* ☐
- eine Cauchyfolge *wahr* ☒ *falsch* ☐

Aufgabe M3. Auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist die Funktion stetig?

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$ ist stetig auf

- $\mathbb{R}$ *wahr* ☒ *falsch* ☐
- $\{0\}$ *wahr* ☒ *falsch* ☐
- $\mathbb{R}_{>0}$ *wahr* ☒ *falsch* ☐
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ *wahr* ☒ *falsch* ☐

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ ist stetig auf

- $\mathbb{R}$ *wahr* ☐ *falsch* ☒
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *wahr* ☒ *falsch* ☐
- $\mathbb{Z}$ *wahr* ☐ *falsch* ☒
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *wahr* ☒ *falsch* ☐

Name: . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Multiple choice-Teil

Aufgabe M4. Wahr oder Falsch?

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x+1) = f(x)$. Dann ist f beschränkt.
wahr ☐ *falsch* ☒

(b) Sei $A = [0, 1]$ und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf A ein Maximum an.
wahr ☒ *falsch* ☐

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.
wahr ☒ *falsch* ☐

(d) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton und surjektiv, so ist f auch bijektiv.
wahr ☒ *falsch* ☐

(e) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f\Big(x + \frac{1}{n}\Big) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f\Big(x - \frac{1}{n}\Big).$$

wahr ☐ *falsch* ☒

(f) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, so existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$.
wahr ☐ *falsch* ☒

(g) Sei $A = [a, b] \cup [c, d]$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt.
wahr ☒ *falsch* ☐

(h) Ist $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig, so existiert ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = x$.
wahr ☒ *falsch* ☐

Aufgabe M5. Kreuzen Sie zutreffende Aussagen an.

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lfloor x \rfloor$, ist

- injektiv *wahr* ☐ *falsch* ☒
- bijektiv *wahr* ☐ *falsch* ☒
- surjektiv *wahr* ☐ *falsch* ☒
- monoton steigend *wahr* ☒ *falsch* ☐

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$, ist

- stetig *wahr* ☒ *falsch* ☐
- konvex *wahr* ☐ *falsch* ☒
- stetig differenzierbar *wahr* ☒ *falsch* ☐
- monoton steigend *wahr* ☒ *falsch* ☐

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Multiple choice-Teil

Aufgabe M6. Kreuzen Sie zutreffende Aussagen an.

(a) Die Menge aller stetigen Abbildungen $f : \mathbb{R} \to W$, $W \subseteq \mathbb{C}$ bildet mit $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(rf)(x) = rf(x)$ einen reellen Vektorraum, falls

- $W = [0,1]$ *wahr* ☐ *falsch* ☒
- $W = \mathbb{R}$ *wahr* ☒ *falsch* ☐
- $W = \mathbb{C}$ *wahr* ☒ *falsch* ☐
- $W = \mathbb{R}_{>0}$ *wahr* ☐ *falsch* ☒

(b) Das Maximum der differenzierbaren Funktion $f : [0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$

- ist ein lokales Maximum *wahr* ☒ *falsch* ☐
- ist ein globales Maximum *wahr* ☒ *falsch* ☐
- wird zweimal angenommen *wahr* ☐ *falsch* ☒
- ist gleich $\frac{1}{2}$ *wahr* ☒ *falsch* ☐

Aufgabe M7. Kreuzen Sie zutreffende Aussagen an.

(a) Die vierte Ableitung von $\cos x \cdot e^{-x}$

- ist $-4\cos x \cdot e^{-x}$ *wahr* ☒ *falsch* ☐
- ist $4x \cos x \cdot e^{-x}$ *wahr* ☐ *falsch* ☒
- ist stetig *wahr* ☒ *falsch* ☐
- existiert nicht *wahr* ☐ *falsch* ☒

(b) Der Grenzwert von $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$ für $x \to 0$

- ist negativ *wahr* ☐ *falsch* ☒
- ist $e^{-3/2}$ *wahr* ☐ *falsch* ☒
- ist 1 *wahr* ☐ *falsch* ☒
- existiert nicht *wahr* ☐ *falsch* ☒

Aufgaben-Teil

Aufgabe A1.

Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge. Alles in Quantoren usw.:

$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},\ \exists C>0 : (\forall n\in\mathbb{N} : |a_n| \leq C)$, gilt:

$\exists (n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} : (\forall j\in\mathbb{N} : n_j < n_{j+1}) : \exists a\in\mathbb{R} : \underbrace{\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a}_{\circledast}$,

wobei $\circledast \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists J\in\mathbb{N}\ \forall j\geq J : |a_{n_j} - a| < \varepsilon$.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgaben-Teil

Aufgabe A2.

Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n e^{-x}$ genau ein lokales und globales Maximum an der Stelle $x = n$ besitzt. Gibt es ein Minimum?

Berechnung der Ableitung von f mit Produktregel:

1 $f'(x) = n x^{n-1} \cdot e^{-x} + x^n \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \underbrace{x^{n-1} \cdot e^{-x}}_{>0 \text{ für alle } x>0} (n-x)$,

2 dabei ist $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

3 Für $x < n$ ist $f'(x) > 0$, für $x > n$ ist $f'(x) < 0$. (VZwechsel von f')

Da f stetig diff'bar, genau bei $x = n$ die Ableitung 0 hat,

4 und da nahe $x = 0$, dem linken Rand des Definitionsbereiches, die Funktion streng monoton steigt, hat f bei $x = n$ ein

5 lokales und globales Maximum

6 Weiter ist $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) \underset{\text{exp stetig}}{=} 0 \cdot e^0 = 0$

und

7 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$,

(wegen sukzessiver Anwendung von de l'Hospital (induktiv) oder Reihenentwicklung von e^x)

also ist $\inf \{ f(x) \mid x > 0 \} = 0$,

8 0 wird aber nicht als Wert von f angenommen, also existiert kein Minimum.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgaben-Teil

Aufgabe A3.
Beweisen Sie: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und überall nicht-negativ. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in [a, b] : f(x) = 0.$$

<u>Beweis:</u> Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0$.

„$\Leftarrow$": Sei $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist

1 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0.$$

2 „$\Rightarrow$": Sonst sei $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$,

Sei $c := f(x_0) > 0$.

3 Da f stetig, ex. ein $\delta > 0$ mit $f(x) > \frac{c}{2}$ für alle $x \in [a,b] \cap \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, =: I$ ein IV mit nichtleerem Inneren.

4 [Denn: f stetig in x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

also ex. für $\varepsilon := \frac{c}{2}$ ein $\delta > 0$ mit

5 $$c - f(x) = f(x_0) - f(x) < |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow -f(x) < -\frac{c}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{c}{2}.]$$

6 Falls $x_0 = a$ ist $I = [a, a+\delta[$, falls $x_0 = b$ ist $I = \,]b - \delta, b]$.

Für $x \neq a$ und $x \neq b$ kann man durch ev. Verkleinerung von $\delta > 0$

7 erreichen, dass $f(x) > \frac{c}{2}$ für $x \in I = \,]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$ ist. Dann ist

8 $$0 = \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_I f(x)\,dx \geq \delta \cdot \inf_{x \in I} f(x) > \delta \cdot \frac{c}{2} > 0, \quad \lightning \quad \square$$

Monotonie des Integrals

Länge des IVs I