Repetitoriumsstunde

① Vollständige Induktion

$n!$, $\binom{n}{k}$ und deren Rekursionsformel
bzw. explizit: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Binom. Satz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

②, ③, ④ : $\mathbb{R}$

② Körperaxiome ...

③ Anordnungsaxiome

3 Anordnungsaxiome: Trichotomie, Abgeschl. bzgl. $\dot{+}$
$(x>0 \vee x=0 \vee x<0)$ $(x,y>0 \Rightarrow x \dot{+} y > 0)$

...

Archim. Axiom ...
$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$

④ Vollständigkeitsaxiom

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$.

Def.: $s \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke $:\Leftrightarrow \forall x \in U: x \leq s$
$U \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschr. $:\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}: s$ ist o.S.

max U ist ein $a \in U$ mit: $\forall x \in U : x \leq a$
(muss nicht immer existieren!)

Dann: $\sup U := \min \{ s \in \mathbb{R} \mid s \text{ ob. S. von } U \}$.

Vollst.axiom: Jede nichtleere, nach oben beschr. Teilm. von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste ob. Schranke in $\mathbb{R}$.

$\forall M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset, \underbrace{M \text{ hat ob. S.}}_{} :$ $\quad \sup M \in \mathbb{R}$

$\exists s \in \mathbb{R} : s \text{ ob. S.}$
$\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} \; \forall x \in M : x \leq s$

(5): Abbildungen usw.:

$f : A \to B, \quad f(A) := \{ f(x) \in B \mid x \in A \}$ Bild von f

$M \subseteq B \rightsquigarrow f^{-1}(M) := \{ x \in A \mid f(x) \in M \}$ Urbild von M unter f

inj. / surj. / bijektiv

(6): Metrische Räume und Konvergenz

$(\mathbb{R}, d)$ ist metrischer Raum,
$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d(x,y) := |x-y|$

(X, d) metr. Raum, $r > 0$.
$B_r(x) = \{ y \in X \mid d(x,y) \leq r \}$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge reeller Zahlen.
Dann:

(x_n) kgt. $:\Leftrightarrow \exists \bar{x} \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0:$
$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$

Grenzwert $\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} x_n$

(x_n) Cauchy-kgt. $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0:$
$|x_n - x_m| < \varepsilon$

Kgz. $\Rightarrow$ Cauchy-Kgz.
$\Leftarrow$, falls vollst. Raum vorliegt, z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$\bar{x} \in X$ HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $:\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0: |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$

(HP von X = reelle Zahl $\bar{x}$, der GW einer konvergenten Folge in X ist)
$(X \subseteq \mathbb{R})$

$X = \{x_n = (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$\rightsquigarrow$ HP von X sind $1, -1$

GW-Sätze: a_n, b_n kgt. $\Rightarrow a_n \pm b_n$ kgt.
a_n, b_n kgt., $b_n \neq 0$ für alle n, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$
$\Rightarrow 1/b_n$ kgt.

B-W

(17) Reihen

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist
- die Folge (s_k) der Partialsummen $s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$
- der GrW dieser Folge, falls konvergent

$x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$ geometr. Summe $\rightsquigarrow a_k := x^k$

$\rightsquigarrow$ Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, (geom. Reihe)

diese konvergiert für $|x| < 1$
gegen $\frac{1}{1-x}$

harm. Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

Satz: $\sum_n a_n$ kgt. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ (a_n) Nullfolge

Leibniz: Sind alle $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$ mon. fällt,
so $\sum (-1)^n a_n$ kgt. $\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ kgt.

$\sum a_n$ abs. kgt. $:\Leftrightarrow \sum |a_n|$ kgt.

Satz: $\sum a_n$ abs. kgt. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum a_n$ kgt.

Majoranten-Kriterium: $\sum c_n$ kgt., alle $c_n \geq 0$, (a_n) mit $|a_n| \leq c_n$
$\Rightarrow \sum a_n$ abs. kgt.

<u>Quotientenkrit.:</u> Sei (a_n), $a_n \neq 0$ für alle n,
sei $\exists\, 0 < \theta \underline{\underline{\leq 1}}$, $\forall n: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$
$\Rightarrow \sum a_n$ abs. kgt.

$\sum a_n$ div., falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ für alle großen n

<u>Wurzelkriterium:</u>

Sei (a_n),
sei $\exists\, 0 < \theta < 1$, $\forall n: \sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$
$\Rightarrow \sum a_n$ abs. kgt.

$\sum a_n$ div., falls $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ für alle großen n

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{kgt. für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R},$$
sogar für alle $x, y \in \mathbb{C}$

⑧ Elem. Fkt. und $\mathbb{C}$

$\sqrt[k]{\ }$ ist Umkehrung von $x \mapsto x^k$

$\log := \exp^{-1} \rightsquigarrow \log(x \cdot y) = \log x + \log y$

$\hookrightarrow \log: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

$\exp_a(x) := \exp(x \log a), \quad a > 0, a \neq 1$

$\log_a(x) := \exp_a^{-1}(x)$

$\mathbb{C} = \{ \underbrace{x + iy}_{z \in \mathbb{C}} \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ $\qquad z = x + iy$

$\rightsquigarrow x = \operatorname{Re} z, \; y = \operatorname{Im} z$

$i^2 = -1$

$2\pi, \quad \pi := \min \{ x > 0 \mid \sin x = 0 \}$

sin, cos sin 2π-periodisch, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \tan: \mathbb{R} \setminus N \to \mathbb{R}$

9 Stetigkeit:

$f: D \to \mathbb{R}, \; D \subseteq \mathbb{R}, \quad a \in D$

f stetig in $a \iff \forall (x_n) \subseteq D, \; x_n \to a:$

$f(x_n) \to f(a)$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \in D)}} f(x)$

ZWS

$\downarrow$

Max / Min-Prinzip

(10) Differenzierbarkeit

$V \subseteq \mathbb{R}$ offenes I V, $a \in V$.

f in a diff'bar $:\Leftrightarrow f'(a) := \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in V \setminus \{a\}}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ex.

Bem.: Auch für $V \subseteq \mathbb{R}$ bel.,
falls a ein HP von V ist

diff'bar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ stetig

Bsp. zur Abl. mit Umkehrfkt.:

$g = \arctan := \tan^{-1}$, $\quad f = \tan \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\underbrace{\tan^2 x}_{\tan x = \tan \arctan y = y}} = \underline{\underline{\frac{1}{1+y^2}}}$$

Partielle / Subst.-Regel