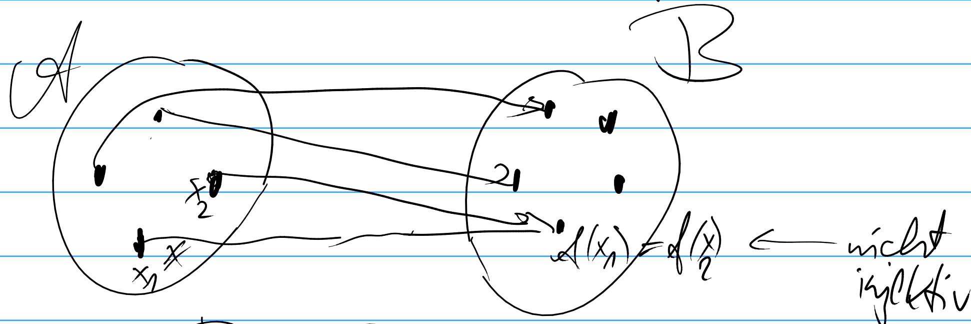
2.11.2011

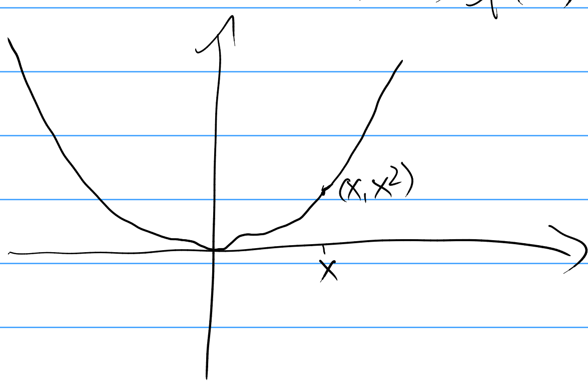
Übung zur Analysis I, Blatt 2+3

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto \underline{f(x)}$$

Argument   Bild von x unter f



Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$



$$f: A \to B, \quad g: B \to C$$
$$x \mapsto f(x) \qquad x \mapsto g(x)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$g \circ f: A \to C, \quad g \circ f(x) := g(f(x))$$

Aufgabe 9

(ii) Geg.: Funktionen $\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$\alpha : x \mapsto 2x$, $\beta : x \mapsto x+1$, $\gamma : x \mapsto x^2$.

Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 \cdot x^2 + 1$

Beh.: $f = \beta \circ \alpha \circ \gamma$

Bew.: z.z.: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \beta \circ \alpha \circ \gamma \, (x)$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\beta \circ \alpha \circ \gamma \, (x) = \beta\,(\alpha(\gamma(x))) = \beta(\alpha(x^2))$
$= \beta(2x^2) = 2x^2 + 1 = f(x)$. $\square$

(i) Bsp.: Beh.: $\alpha \circ \gamma \circ \beta : x \mapsto 2 \cdot (x+1)^2$
$\alpha \circ \gamma \circ \beta \, (x) = \alpha(\gamma(\beta(x))) = \alpha(\gamma(x+1))$
$= \alpha((x+1)^2) = 2 \cdot (x+1)^2$.

$$\gamma(\underbrace{\beta(\underbrace{\beta(x)}_{x^2})}_{x^4}) = \frac{1}{x^4}$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\frac{x+2}{x+1} = \frac{(x+1)+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

(iii) Gegeben: $K := \{ f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \underbrace{x \mapsto c}_{f_c(x) = c \text{ für alle } x \in \mathbb{R}} \mid c \in \mathbb{R} \}$ TV

Vor.: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei derart, dass $\forall f_c \in K : \quad g \circ f_c = f_c \circ g$

Beh.: $g = id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$.

Für $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$:

$$g \circ f_c(x) \overset{\text{Vor.}}{=} f_c \circ g(x)$$

$$f : A \to B, \quad B \subseteq C$$
$$x \mapsto f(x),$$

$$\rightsquigarrow f : A \to C$$

$f : A \to B, x \mapsto f(x)$, „für alle" „existiert"

heißt surjektiv $:\Leftrightarrow \forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$

(x heißt Urbild von y)

$f(A) = \operatorname{im} f = \{ y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y \}$ Bild von f / Zielmenge von f

f surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{im} f = B = f(A)$

$\rightsquigarrow$ f nicht surjektiv $\Leftrightarrow \exists y \in B \; \forall x \in A : f(x) \neq y$

$f: A \to B$ <u>injektiv</u> $:\Leftrightarrow$

$$\left(\forall x_1, x_2 \in A: \underbrace{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}\right)$$

$\rightsquigarrow$ $f: A \to B$ nicht injektiv

$$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in A: \neg\left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in A: \left(\underline{f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2}\right)$$

$$\left[\begin{aligned} (U \Rightarrow V) &\Leftrightarrow (\neg U \vee V) \\ \neg(U \Rightarrow V) &\Leftrightarrow \neg(\neg U \vee V) \\ &\Leftrightarrow \underline{U \wedge \neg V} \end{aligned}\right]$$

$m: x \mapsto x^n, \quad q: x \mapsto x^2 + x$

$p_n = q \circ m$

Aufg. 10

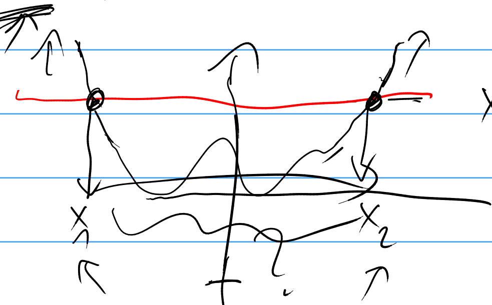
(i) Vor.: $n \in \mathbb{N}$, $p_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\boxed{x \mapsto x^{2n} + x^n}$

Beh.: p_n nicht inj. und p nicht surj.

Bew.: - z.z.: p_n nicht inj., d.h.

$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_2$ und $p_n(x_1) = p_n(x_2)$

Graph:



$x^{2n} + x^n = (x^n)^2 + x^n$

- n gerade: $x_1 = 1, \quad x_2 = -1$

- n ungerade: $x_1 = 0, \quad x_2 = -1$

- z.z.: p_n nicht surjektiv,

d.h. z.z.: $\exists y \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathbb{R}: p_n(x) \neq y$

Zeigen: $\forall x \in \mathbb{R}: p_n(x) \overset{!}{\geq} -1$,

d.h. z.B. $y = -2$ ist nicht Funktionswert unter p_n, also nicht surj.!

$x^{2n} + x^n \geq -1 \iff x^n(x^n + 1) \geq -1$

⋮

(ii) Geg.: $f: X \to Y$, $\quad X, Y$ Mengen

(a) Beh.: f surjektiv $\Leftrightarrow$ f hat Rechtsinverses $r: Y \to X$,

d.h. $\quad f \circ r = id_Y$,

d.h. $\forall y \in Y: f(r(y)) = y$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "f \circ r = id_Y"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Bew.:

Zu „$\Rightarrow$": Def. $r: Y \to X$,

$y \mapsto x_y$, eine gewählte reelle Zahl x_y mit $f(x_y) = y$, die ex. weil f surj.

Dann: $f \circ r = id_Y$, da

$\forall y \in Y: f \circ r(y) = f(x_y) = y$.

Zu „$\Leftarrow$": Sei r Rechtsinv., d.h. $f \circ r = id_Y$.

Dann z.z.: f surj., $\forall y \in Y \ \exists x \in X: f(x) = y$

(b) Beh.: f inj. $\Leftrightarrow$ f hat Linksinverses $l: Y \to X$,

d.h. $l \circ f = id_X$, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}: l(f(x)) = x$.

„$\Rightarrow$": Def. $l: Y \to X$,

$$y \mapsto \begin{cases} x, & \text{das } x \text{ mit } f(y) = x, \text{ falls } y \in f(X) \\ x_0, & \text{falls } y \notin f(X), \end{cases}$$

$x_0 \in X$

„$\Leftarrow$": z.z.: $\underbrace{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow l(f(x_1)) = l(f(x_2))$

Zu Aufg. 11:

$$\min(x,y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq y \\ y, & \text{falls } y < x \end{cases}$$

$$\max(x,y) = \ldots$$

$$|z| = \max\{z, -z\}$$

Aufg. 12:

M heißt abzählbar, falls $\exists$ surj. $f: \mathbb{N} \to M$

$\Leftrightarrow$ M endlich oder $\underbrace{\exists \text{ bij. } f: \mathbb{N} \to M}_{M = \{\underbrace{f(1), f(2), f(3), \ldots}_{\text{„Aufzählung"}}\}}$,

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar $\rightsquigarrow$ $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ abzählbar

Hier: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{\exists (b,c) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}: \underbrace{x^2 + bx + c = 0}\}$

$\downarrow$

0, 1 oder 2 Lösungen

$x^2 + bx + c = 0$

hat Lsgn. $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{b^2}{4} - c}}$

Nehme Aufzählung von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$,

ein (b,c) überspringen, falls 0 Lsg.

das x zu (b,c) zählen, falls 1 Lsg., nämlich x,

zählen x_1, x_2 zu (b,c), falls 2 Lsg., nämlich x_1, x_2