Zentralübung Analysis I, Blatt 1

Aufg. 3

Beh.: $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Bew.: (durch Widerspruch, d.h. indirekt)

Annahme, $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$ sei wahr.

Dann: $\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$,

wobei p, q beide teilerfremd,
d.h. ± 1 sind die einzigen gemeinsamen Teiler $\in \mathbb{Z}$ von p und q.

Dann: $3 = \frac{p^3}{q^3} \Rightarrow 3q^3 = p^3 \Rightarrow$ 3 teilt p, (1)

d.h. es gibt ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $p = 3a$.

Dann: $3 = \frac{3^3 a^3}{q^3} \underset{| \cdot q^3/3}{\Rightarrow} q^3 = 3^2 \cdot a^3 \Rightarrow$ 3 teilt q. (2)

Die Aussagen (1) und (2) widersprechen der Annahme, daß $\frac{p}{q}$ gekürzt sei. $\lightning$

$\square$

Aufg. 4

Vor.: Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei die Folge der Fibonacci-Zahlen, nämlich

$$F_n := \begin{cases} 0, & \text{für } n=0, \\ 1, & \text{für } n=1, \\ F_{n-2} + F_{n-1}, & \text{für } n \geq 2. \end{cases}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

BINETSCHE FORMEL

Bew.: (durch vollständige Induktion nach n)

Induktionsanfang: Zeige Beh. für $n=0$ und $n=1$:

- $n=0$: z.z.: $F_0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \right)$

  Bew.: $0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1 - 1)$. $\square$

- $n=1$: z.z.: $F_1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \right)$

  Bew.: $1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{=\sqrt{5}} \Big) = 1$ ✓ $\square$

zeigen:

<u>Ind. schritt:</u> $n-2, n-1 \rightsquigarrow n$ für $n \geq 2$,

d.h. z.z.: Formel wahr für n, falls die Formel für $n-1$ und $n-2$ wahr ist.

Sei $n \geq 2$. Dann gilt:

$$F_n \overset{\text{Def.}}{=} F_{n-2} + F_{n-1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\underbrace{\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}_{\overset{!}{\underset{①}{=}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\underbrace{\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}_{\overset{!}{\underset{②}{=}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right).$$

① <u>Beh.:</u> $1+\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

<u>Bew.:</u> $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ✓

② <u>Beh.:</u> $1+\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$

<u>Bew.:</u> $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. ✓

$\square$

Aufg. 2

arith. Mittel, geom. Mittel

(i) Beh.: $\forall x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_{>0}: \quad \underbrace{\frac{x_1+\dots+x_n}{n}}_{\text{arith. Mittel}} \geq \underbrace{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}_{\text{geom. Mittel}}$

(UGAM)

Bew.: (vollständige Induktion nach n)

$n=1$: z.z.: $\frac{x_1}{1} \geq x_1$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: Sei $s := \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$.

Ind.vor.: $s^n \geq x_1\cdots x_n$. ←

z.z.: $\left(\frac{x_1+\dots+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \overset{!}{\geq} x_1\cdots x_n \cdot x_{n+1}$

$$l.S. = \left(\frac{ns+x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)s-s+x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \left(s+\frac{x_{n+1}-s}{n+1}\right)^{n+1} = s^{n+1}\Big(1+\underbrace{\frac{x_{n+1}-s}{s(n+1)}}_{\text{„a" für Bernoulli}}\Big)^{n+1}$$

Bernoulli:
$\underline{a \geq -1} \Rightarrow (1+a)^n \geq 1+na$

Bernoulli anwendbar, da

$$\frac{x_{n+1}-s}{s(n+1)} = \underbrace{\frac{x_{n+1}}{s(n+1)}}_{>0} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq -1/2} \geq -1 \checkmark$$

$$\geq s^{n+1}\left(1+(n+1)\cdot\frac{x_{n+1}-s}{s(n+1)}\right) = s^{n+1}\left(1+\frac{x_{n+1}}{s}-\frac{s}{s}\right)$$

$$= s^{n+1}\cdot\frac{x_{n+1}}{s} = s^n\cdot x_{n+1} \underset{\text{Ind.vor.}}{\geq} x_1\cdots x_n\cdot x_{n+1}.$$

□