Zentral-Übung zu Blatt 10

Aufgabe 39

Vor.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+x^2\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right), & \text{für } x\neq 0\\ 0, & \text{für } x=0\end{cases}$

Beh.: f diff'bar, $f'(0)>0$,

f ist in keiner Umgebung von 0 mon. steigend.

(i) Beh.: f diff'bar, $f'(0)>0$.

Bew.: Für $x\neq 0$ ist f auf diff'baren Funktionen zus.gesetzt, also diff'bar.
Und es ist für $x\neq 0$:

$$f'(x)=1+2x\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right)+x^2\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)\cos\left(\frac{2}{x}\right)$$
$$=1+2x\sin\left(\frac{2}{x}\right)-2\cos\left(\frac{2}{x}\right).$$

An der Stelle $x=0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x+x^2\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x}=1+\underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}_{\text{beschr.}}\xrightarrow{x\to 0}\underline{\underline{1}},$$

d.h. $f'(0)=1>0$. $\square$

(ii) Beh.: $\neg\left(\exists\,\varepsilon>0: f|_{]-\varepsilon,\varepsilon[}\text{ monoton steigend}\right)$.

Bew.: Sonst: $\exists\,\varepsilon>0$: $f|_{]-\varepsilon,\varepsilon[}$ mon. steigend

Da $f'(0)=1>0$, gilt $\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[: f'(x)>0$.

⌈Wegen $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-0}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$⌋

Setze $x_n := \frac{1}{\pi n} \in]0, \varepsilon[$ für n groß.

⌈So ein n ex., da $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$⌋

Dann gilt: $f'(x_n) = f'\left(\frac{1}{\pi n}\right) = 1 + \frac{2}{\pi n} \underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - 2\underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1}$

$$= 1 + \frac{2}{\pi n}\cdot 0 - 2\cdot 1 = -1 < 0,$$

im ↯ zu $f'(x) \geq 0$ für $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. $\square$

__Bem.:__ Vgl. den entspr. Satz der Vorl.:

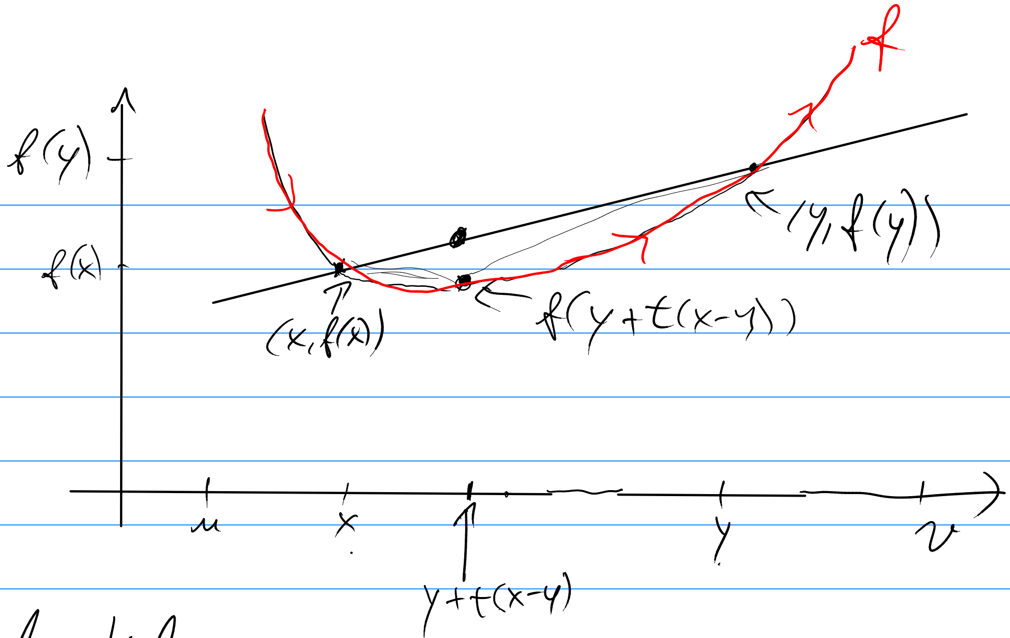
nur wenn $f'(x)>0$ für alle x eines $\mathcal{I}V$'s (mit nichtleerem Inneren) gilt,
kann geschl. werden, daß f dort monoton.

Aufgabe 40

__Vor.:__ Sei $u<v$, $f:]u,v[\to \mathbb{R}$.

f heißt Konvex: $\Leftrightarrow \forall x,y \in]u,v[\ \forall t \in [0,1]$:

$$f(\underbrace{tx+(1-t)y}_{=y+t\cdot(x-y)}) \leq \underbrace{tf(x)+(1-t)f(y)}_{=f(y)+t\cdot(f(x)-f(y))}$$



anschaulich:

f konvex $\Leftrightarrow$ f macht "Linkskurve"

(i) Beh.: $\forall a, b, c \in]u,v[, \ a < b < c$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \underset{(A)}{\leq} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \underset{(B)}{\leq} \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Bew.: Zur Ungl. (A):

Setzen $t := \frac{c-b}{c-a}$ $\leadsto$ $1-t = \frac{b-a}{c-a}$,

also $ta + (1-t)c = \frac{c-b}{c-a} \cdot a + \frac{b-a}{c-a} \cdot c = b$,

also $f(b) \overset{\text{(konvex)}}{\leq} \frac{c-b}{c-a} \cdot f(a) + \frac{b-a}{c-a} \cdot f(c)$ $\quad | -f(a), \ | : (b-a)$

$\leadsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$

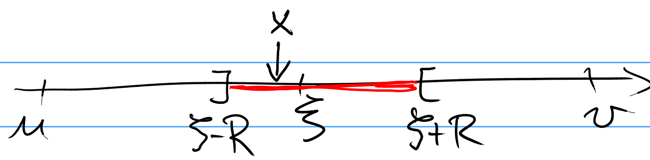
Zur Ungl. (B): analog, $b = tc + (1-t)a$, $t := \frac{b-a}{c-a}$

$\leadsto$ (B)

(ii) <u>Beh.:</u> f ist stetig.

<u>Bew.:</u> (zeigen ε-δ-Stetigkeit, d.h. wir zeigen:
$$\forall \xi \in]u,v[: \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x-\xi| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(\xi)| < \varepsilon \quad)$$

Sei $\xi \in]u,v[$.



Sei $R>0$ mit $\xi-R, \xi+R \in]u,v[$.

Sei $$L := \max\left(\frac{|f(\xi+R)-f(\xi)|}{R}, \frac{|f(\xi)-f(\xi-R)|}{R} \right),$$
Œ $L>0$.

Dann gilt:
$$\forall x \in]\xi-R, \xi+R[:$$

<u>1. Fall:</u> $x<\xi$:
$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} \underset{(i),A}{\leq} \frac{f(\xi+R)-f(\xi)}{R} \leq L,$$
d.h. falls $f(\xi) \geq f(x)$ ist also $\left|\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\right| \leq L$

und sonst, d.h. falls $f(\xi) < f(x)$
$$\frac{f(x)-f(\xi)}{\xi-x} = -\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} \underset{(i),B}{\leq} \underbrace{-\frac{f(\xi)-f(\xi-R)}{R}}_{\geq -L} \leq L,$$

d.h. $\left|\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\right| \leq L$ ebenso.

2. Fall: $x > \xi$: analog zeigbar, daß

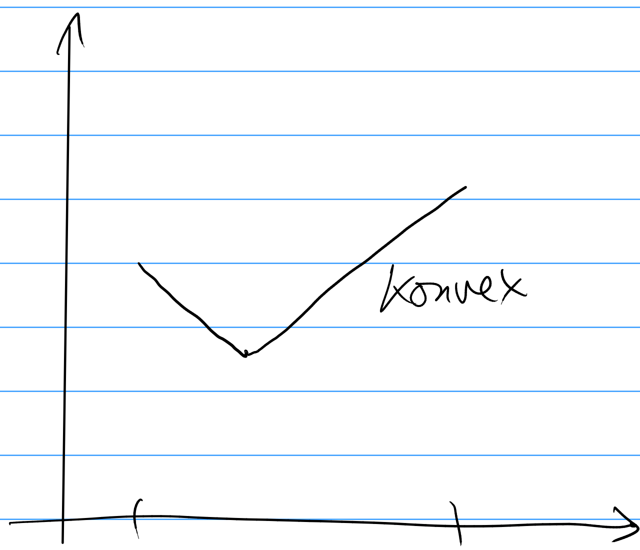
$$\frac{|f(\xi)-f(x)|}{|\xi-x|} \le L$$

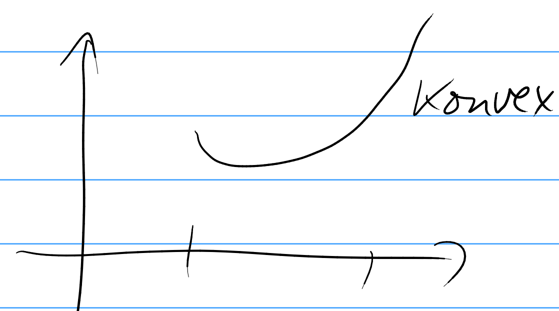
Es folgt: $\forall x \in \,]\xi-R, \xi+R[\, : \underline{|f(\xi)-f(x)| \le L\cdot|\xi-x|}$ $(*)$

Sei $\varepsilon>0$, setze $\delta := \min\left(\frac{\varepsilon}{L}, R\right)$.

Dann ist $\forall x, |x-\xi|<\delta$:

$$|f(x)-f(\xi)| \overset{(*)}{\le} L\cdot\underbrace{|\xi-x|}_{<\delta} < L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon. \quad \square$$





Sei f 2x diff'bar. Dann: f konvex $\Leftrightarrow f'' > 0$

Beh.: $f''(a) \overset{!}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$

Bew.:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\rightsquigarrow f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\lim\limits_{k \to 0} \frac{f(a+h+k) - f(a+h)}{k} - \lim\limits_{l \to 0} \frac{f(a+l) - f(a)}{l}}{h}$$

Setzen $k = -h$, $l = -h \to 0$, dann:

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{f(a+h-h) - f(a+h)}{-h} - \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \cdot \left(f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) \right).$$

$\square$