Kap. R-Integral:

① $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f R-int'bar

② $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow$ f R-int'bar

③ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-int'bar $\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

MWS der Integration

Fundamentalsatz / HS

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

Stammfunktion: $c \in [a,b]$

$\rightsquigarrow F_c(x) := \int_c^x f(t)\,dt$

Bsp. Subst.regel: $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx$

$$= \int_0^1 e^u \, du = e^u \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = \underline{\underline{e - 1}}$$

Bsp. part. Integration:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx$$

$f' = \cos x$, $g = \sin x$

$f = \sin x$, $g' = \cos x$

$$\rightsquigarrow 2 \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x \Big|_0^{\pi/2}$$

Funktionenfolge

$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n: K \to \mathbb{C}$, $K \subseteq \mathbb{R}$

Bsp.: $f_n(x) = x^n$, $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$

Sei $f: K \to \mathbb{C}$.

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ptw.}} f \;:\Leftrightarrow\; \forall x\in K: \underbrace{f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)}_{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall x \in K}\, \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n \geq N(\varepsilon): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ptw. kgt., wenn $\exists f: f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ptw.}} f$

Bsp.: $f_n(x) = x^n \rightsquigarrow f(x) = \left.\begin{cases} 0, & x\in[0,1[, \\ 1, & x = 1 \end{cases}\right\}$ unstetig!

$(f_n), f$ geg.

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm.}} f \;:\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n \geq N(\varepsilon): \underbrace{\boxed{\forall x\in K}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

d.h. $\underbrace{\sup\{|f_n(x) - f(x)|;\ x\in K\}}_{=:\ \|f_n - f\|_{\infty}} < \varepsilon$

$$\boxed{\left(f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm.}} f\right) \Longrightarrow \left(f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ptw.}} f\right)}$$

Satz: • $f_n \overset{glm}{\Longrightarrow} f$, alle f_n stetig $\Longrightarrow f$ stetig

⌈ f_n stetig, dann: ($f_n \overset{glm}{\not\Longrightarrow} f \Longleftarrow f$ unstetig)

(Bsp.: $f_n(x) = x^n$: f unstetig, also keine glm. Kgz!) ⌋

• $f_n \overset{glm}{\Longrightarrow} f$, alle f_n stetig $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

• $f_n \overset{ptw.}{\longrightarrow} f$, alle f_n st. diff'bar, $f_n' \underset{glm}{\Longrightarrow} f'$ $\Longrightarrow f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

Aufgabe 42

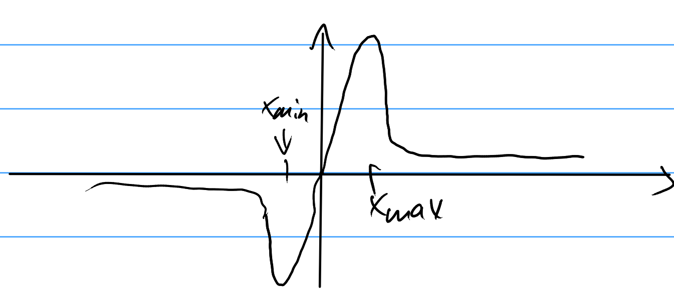
$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$

Für $x \neq 0$ fest ist $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \rightsquigarrow f(x) = 0$ für alle x

(1) Kgz. nicht glm. auf einem IV I, das $x=0$ enthält:

$f_n(x)$ hat Min. $-\sqrt{\frac{n}{2e}}$ in $x_{min} = -\sqrt{\frac{1}{2n}}$

Max $\sqrt{\frac{n}{2e}}$ in $x_{max} = \sqrt{\frac{1}{2n}}$



$\rightsquigarrow \|f_n\|_{C^0(I)} = \sqrt{\frac{n}{2e}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$,

bei Glm. Kgz. müsste aber

$\|f_n - 0\|_{C^0(I)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gehen

(2) Kgt. glm. auf $[a,b]$ ($\not\ni 0$), etwa $a>0$.

$\forall x \in [a,b]$: $|f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = nxe^{-nx^2} \leq \underbrace{nb \cdot e^{-na^2}}$

Schranke ist unabh. von x, Schranke $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

Es folgt: $\|f_n(x) - f(x)\|_{C^0(\mathbb{R})} \leq nbe^{-na^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

also Glm. Kgz.!

Bem.: Rolle $\rightsquigarrow$ (V)MWS $\rightsquigarrow$ de l'H

Potenzreihen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad a \in \mathbb{R}, \ (c_n)_{n\in\mathbb{R}}$$

- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ geom. Reihe auf $]-1,1[$ ✓, $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$(f_N(x))_{N\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

Pot. reihe $\sum c_n (x-a)^n$ für $x \in \mathbb{R}$:

- kgt. nur für $x = a$
- kgt. für <u>alle</u> $x \in \mathbb{R}$
- kgt. auf $]a-R, a+R[$,
  d.h. kgt. <u>für alle</u> $x \in]a-R, a+R[$,

R heißt <u>Konvergenzradius</u>,

$$R := \sup \{ r > 0 \mid f \text{ kgt. auf }]a-r, a+r[\}$$

<u>Für $a = 0$:</u> $\quad R = \dfrac{1}{\limsup \frac{c_{n+1}}{c_n}} = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$

Quot. kriterium: $\dfrac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \leq \theta < 1 \rightsquigarrow \dfrac{c_{n+1}}{c_n} \cdot x \leq \theta < 1$

$$\rightsquigarrow \text{Kgz. für } x \leq \frac{1}{\limsup \frac{c_{n+1}}{c_n}}$$

Wurzelkrit. $\sqrt[n]{|c_n x^n|} \leq \theta < 1 \rightsquigarrow |x| \leq \dfrac{\theta}{\sqrt[n]{|c_n|}} < \dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$

$$\rightsquigarrow \text{Kgz. für } x \leq \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

<u>Satz:</u> (reelle) Potenzreihen konvergieren <u>gleichmäßig</u> auf abg. Iv'en, die im Konvergenzintervall $]a-R, a+R[$ enthalten sind.

Für $x \in]a-R, a+R[$ ist $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n, \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$$

$$f_{1,2} : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

Abschluß:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \log(1+\frac{1}{n})} = e^{\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{1/n}}$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1+x)}{x}} \overset{de\,l'H}{=} \lim_{x\to 0} e^{\left.\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\right\} \to 1} = e^1 = \underline{\underline{e}}$$