Hörsaal-Übung Analysis I

zu Blatt 2

Aufgabe 7

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k^3 \overset{!}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$

Aus Vorlesung: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$
Kleiner Gauß

Bew.: Vollst. Induktion:

Ind. anfang: $n=1$: $l.S. = 1^3 = 1 = 1^2 = r.S.$ ✓

Ind. schritt: $n \rightsquigarrow n+1$:

$$r.S.(n+1) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \right)^2$$

$$\underset{\text{bin. Formel}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 + 2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} k \right)}_{\substack{= \frac{1}{2} n(n+1) \\ \text{Kl. Gauß}}} (n+1) + (n+1)^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 + \underbrace{n \cdot (n+1)^2 + (n+1)^2}_{= (n+1) \cdot (n+1)^2 = (n+1)^3}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 + (n+1)^3 \underset{\text{Ind. Vor.}}{=} \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$$

$$= l.S.(n+1)$$

$\square$

Aufgabe 8

Beh.: $\mathbb{K} := \{ \overbrace{(a,b)}^{a+ib} \mid a,b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$, $i := (0,1)$ die imaginäre Einheit

mit $\odot, \oplus$ ist ein Körper,

wobei $(a,b) \oplus (c,d) := (a+c, b+d)$,

$(a,b) \odot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$

„Körper der Komplexen Zahlen"

<u>Bew.:</u> Nachweis der Körperaxiome:

Da $\oplus$ komponentenweise mit der Addition $+$ auf $\mathbb{R}$ übereinstimmt, ist auch $\mathbb{K}=\mathbb{R}^2$ bzgl. $\oplus$ eine abelsche Gruppe.

Zur Operation $\odot$:

- Assoziativität von $\odot$:

$$\big((a,b)\odot(c,d)\big)\odot(e,f) = (ac-bd,\ ad+cb)\odot(e,f)$$
$$= (ace-bde-adf-cbf,\ acf-bdf+ade+cbe)$$

$$(a,b)\odot\big((c,d)\odot(e,f)\big) = (a,b)\odot(ce-df,\ cf+de)$$
$$= (ace-daf-bcf-bde,\ acf+ade+bce-bdf)$$

Beide Ausdrücke sind gleich!

- $(1,0)$ ist neutr. El. bzgl. $\odot$:
$$(1,0)\odot(a,b) = (1\cdot a-0\cdot b,\ 1\cdot b+0\cdot a) = (a,b)$$ ✓

- Für $(a,b)\neq(0,0)$ ist $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Inverses bzgl. $\odot$, d.h. $(a,b)\odot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \overset{!}{=} (1,0)$.

[Denn: $l.S. = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2},\ \frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = r.S.$]

- $\odot$ ist kommutativ, d.h. $(a,b)\odot(c,d)=(c,d)\odot(a,b)$
  $\rightsquigarrow$ Nachrechnen!

- Distributivgesetze, d.h.:

$$\left.\begin{aligned}&(a,b)\odot\big((c,d)\oplus(e,f)\big)\\ &\overset{!}{=}(a,b)\odot(c,d)\oplus(a,b)\odot(e,f)\end{aligned}\right\}\text{ Nachrechnen!}$$

Haben: $i^2 \overset{!}{=} -1$,

genau: $\underbrace{(0,1)^2}_{} \overset{!}{=} (-1,0)$

$$=(0,1)\odot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0) \checkmark$$

$$(a,b)\,\boxed{\cdot}\,(c,d):=(ac,\ bd)$$

$\underline{(a,b)\neq(0,0)} \rightsquigarrow (a,b)^{-1}=\underline{\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)}$

Ergibt so keinen Körper: $(1,0)$ hat kein mult. Inverses!

Äquivalenzrelation

Sei A eine Menge.

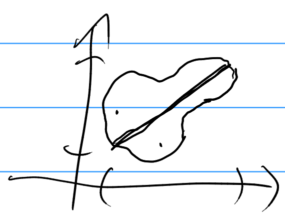
$R \subseteq A \times A = \{(a,b) \mid a,b \in A\}$

heißt **Ä-Rel.**, falls gilt:

(i) $\forall a \in A: (a,a) \in R$ — Reflexivität: $a \sim a$

(ii) $\forall a,b \in A: (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ — Symmetrie: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

(iii) $\forall a,b,c \in A: (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ — Transitivität: $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$



$$\boxed{a \sim b :\Leftrightarrow (a,b) \in R}$$

Beispiele: (1) Sei A eine Menge von Schülern. Dann: $a \sim b$ gelte, falls a und b in derselben Schulklasse sind. → Ä-Klassen sind Schulklassen

(2) Sei A eine Menge von Aussagen. Für $B, C \in A$ gelte $B \sim C$, falls $B \Leftrightarrow C$,

d.h. $B \Rightarrow C \wedge C \Rightarrow B$.

$\uparrow$ Äquivalenz

(3) Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$, d.h. $A = \mathbb{R}^2$.

Weiter sei $v \in \mathbb{R}^2$.

Sind $P_1, P_2 \in A$, so sei $\underbrace{P_1 \sim P_2}_{\sim_v} :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \underbrace{P_1 = P_2 + \lambda v}$

P_1, P_2 liegen auf Geraden mit Richtungsvektor v

$\leadsto$ Ä-klassen sind die Geraden mit Richtungsvektor v

(4) $A := \{ (z,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \neq 0 \}$

$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) :\Longleftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$

$\Longleftrightarrow \frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2}$

Für $r \in \mathbb{Q}$ ist $\{ (z,n) \in A \mid \frac{z}{n} = r \}$ eine Ä-Klasse $\leadsto$ Quotientenmenge $= \mathbb{Q}$

Äquivalenzklasse zu $a \in A$ ist

$[a] := \{ b \in A \mid b \sim a \}$

Gilt $a \sim b$, so ist $[a] = [b]$

a heißt Repräsentant von $[a]$

Menge der Ä-kl. heißt Faktormenge / Quotientenmenge, diese ist

$A/\!\sim \; := \{ [a] \mid a \in A \}$

Man hat $A = \bigcup_{a \in A} [a]$

Bsp.: $A = \mathbb{Z}$, $a \sim b :\Leftrightarrow 7$ teilt $a-b$

Ä-Klassen: $7 \cdot \mathbb{Z} = \{7 \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\} = 7 + 7 \cdot \mathbb{Z}$
$1 + 7 \cdot \mathbb{Z} = \{1 + 7 \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\} = 8 + 7 \cdot \mathbb{Z}$
$\vdots$
$6 + 7 \cdot \mathbb{Z}$

Ä-Klassen: $[7] = 7 \cdot \mathbb{Z} = [0]$,
$[1] = [8] = 1 + 7 \cdot \mathbb{Z}$ usw.

Dann: $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \ldots \cup [6]$

Möchten $[a] + [b] := [a+b]$

Problem: $[a] = [a']$, $[b] = [b']$
ist dann $[a+b] = [a'+b']$?

Falls ja, ist diese Def. von $+$ <u>repräsentantenunabh.</u>,
also <u>wohldefiniert</u>