Zu Aufg. 9:

TV

(iii) Geg.: $K := \{ f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \underbrace{x \mapsto c}_{f_c(x) = c \text{ für alle } x \in \mathbb{R}} \mid c \in \mathbb{R} \}$

Vor.: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei derart, dass $\forall f_c \in K : \; g \circ f_c = f_c \circ g$

Beh.: $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x$.

Bew.: Für $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$:

$$g(c) = g(f_c(x)) = g \circ f_c(x) \overset{\text{Vor.}}{=} f_c \circ g(x) = f_c(g(x)) = c,$$

d.h. $\forall c \in \mathbb{R} : g(c) = c$, also ist $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. $\square$

$f : A \to \overset{\text{Zielmenge}}{B}, \; x \mapsto f(x)$, „für alle" „existiert"

heißt **surjektiv** $:\Longleftrightarrow \forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$ (x heißt Urbild von y)

$f(A) = \operatorname{im} f = \{ y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y \}$ Bild von f

f surjektiv $\Longleftrightarrow \operatorname{im} f = B = f(A)$

$f : A \to B$ **injektiv** $:\Longleftrightarrow$

$$\left(\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2 \right)$$

Zu Aufgabe 10:

(ii) Geg.: $f: X \to Y$, X, Y Mengen

(a) Beh.: f surjektiv $\Leftrightarrow$ f hat Rechtsinverses $r: Y \to X$,
d.h. $f \circ r = id_Y$,
d.h. $\forall y \in Y: f(r(y)) = y$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "f \circ r = id_Y"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Bew.:

Zu „$\Rightarrow$": Def. $r: Y \to X$,
$y \mapsto x_y$, eine gewählte reelle Zahl x_y mit $f(x_y) = y$, die ex. weil f surj.

Dann: $f \circ r = id_Y$, da
$\forall y \in Y$: $f \circ r(y) = f(r(y)) = f(x_y) = y$.

Zu „$\Leftarrow$": Sei r Rechtsinv., d.h. $f \circ r = id_Y$.
Dann z.z.: f surj., $\forall y \in Y \ \exists x \in X: f(x) = y$
Sei $y \in Y$. Dann ist $f(r(y)) = y$,
d.h. es gibt ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, nämlich $x = r(y)$. $\square$

(b) <u>Beh.:</u> f inj. $\Longleftrightarrow$ f hat Linksinverses $\ell: Y \to X$,
d.h. $\ell \circ f = \mathrm{id}_X$, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}: \ell(f(x)) = x$.

<u>„$\Rightarrow$":</u> Def. $\ell: Y \to X$,

$$y \mapsto \begin{cases} x, & \text{das } x \text{ mit } f(x)=y, \text{ falls } y \in f(X) \\ x_0, & \text{falls } y \notin f(X), \\ & x_0 \in X \text{ fest} \end{cases}$$

Dann ist für $x \in \mathbb{R}$:
$\ell(f(x)) = \ell(y_x) = x$, also ist $\ell \circ f = \mathrm{id}_X$.

<u>„$\Leftarrow$":</u> Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$.
Dann: $\ell(f(x_1)) = \ell(f(x_2))$,
d.h. $x_1 = x_2$. Also ist f injektiv. $\square$

<u>Aufg. 11:</u>

(i) <u>Beh.:</u> $\forall x, y \in \mathbb{R}: \max(x,y) = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|)$

(ii) <u>Beh.:</u> $\forall x, y \in \mathbb{R}: \min(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$

<u>Bew.:</u>
<u>1. Fall:</u> $x \leq y$. Dann:
(i): $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+y-x) = \frac{1}{2}\cdot 2y = y = \max(x,y)$.
(ii): $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(y-x)) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x = \min(x,y)$.
<u>2. Fall:</u> $x > y$. Dann:
(i): $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x = \max(x,y)$.
(ii): $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(x-y)) = \frac{1}{2}\cdot 2y = y = \min(x,y)$. $\square$

Zu

Aufg. 12:

M heißt abzählbar, falls
$\exists$ surj. $f: \mathbb{N} \to M$

$\Leftrightarrow$ M endlich oder $\underbrace{\exists \text{ bij. } f: \mathbb{N} \to M}$,
$M = \{\underbrace{f(1), f(2), f(3), \ldots}_{\text{„Aufzählung"}}\}$

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar $\rightsquigarrow$ $\underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}$ abzählbar
$\{r(1), r(2), r(3), \ldots\}$ $= \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{Q}\}$

	$r(1)$	$r(2)$	$r(3)$	$r(4)$	$r(5)$	$\ldots$
$r(1)$	$(r(1),r(1))$	$(r(1),r(2))$	$(r(1),r(3))$	$\ldots$		
$r(2)$	$(r(2),r(1))$	$(r(2),r(2))$	$(r(2),r(3))$	$\ldots$		
$r(3)$	$(r(3),r(1))$	$(r(3),r(2))$	$(r(3),r(3))$	$\ldots$		
$r(4)$	$(r(4),r(1))$	$(r(4),r(2))$	$(r(4),r(3))$	$\ldots$		
$\vdots$						

Cantorsches Diagonal-Verfahren

Hier: $M := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (b,c) \in \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}_{\text{abzählbar}} : \underbrace{x^2 + bx + c = 0}\}$

↓ 0, 1 oder 2 Lösungen

$x^2 + bx + c = 0$
hat Lsgn. $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

Nehme Aufzählung von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$,
ein (b,c) überspringen, falls 0 Lsg.
das x zu (b,c) zählen, falls 1 Lsg., nämlich x,
zählen x_1, x_2 zu (b,c), falls 2 Lsg., nämlich x_1, x_2

Tabelle der $(b,c)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$:

$f:\mathbb{N}\to M$ bij.

$c \backslash b$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\dots$
c_1	(c_1,b_1)	(c_1,b_2)	(c_1,b_3)			
c_2	(c_2,b_1)	(c_2,b_2)	(c_2,b_3)			
c_3	(c_3,b_1)	(c_3,b_2)	(c_3,b_3)			
c_4						
$\vdots$						

$f:\mathbb{N}\xrightarrow{bij}\mathbb{Q}\xrightarrow{bij.}\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\dots\xrightarrow{surj.}M$

Bew.: Wir def. $U\subseteq\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ durch

$$U:=\{(b,c)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\mid\exists\, x\in\mathbb{R}: x^2+bx+c=0\}$$

Betr. $f:U\to\mathbb{R}^2$

$(b,c)\mapsto(x_1,x_2)$ mit $x_{1/2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$

Dann ist f injektiv.

⌈ Haben Linksinverses $l:\mathbb{R}^2\to U,\ (x_1,x_2)\mapsto(-x_1-x_2,\ x_1\cdot x_2)$,

da $l(f(b,c))=l(x_1,x_2)=\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\ }+\frac{b}{2}-\sqrt{\ },\ (-\frac{b}{2}-\sqrt{\ })(-\frac{b}{2}+\sqrt{\ })\right)$

$=\left(b,\frac{b^2}{4}-\left(\frac{b^2}{4}-c\right)\right)=(b,c)$, also: $l\circ f=\mathrm{id}_U$. ⌋

Also ist $f:U\to f(U)$ bijektiv,

also, da U abzählbar, ist auch $f(U)$ abz'bar.

Betr. nun $g:\underbrace{\{0,1\}\times f(U)}_{\text{abz'bar}}\longrightarrow M$,

$$(a,x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}x_1, & a=1\\ x_2, & a=0\end{cases}$$

Beh.: g ist surjektiv. Dies zeigt, daß M auch abz'bar ist.

⌈Haben Rechtsinverses,

$$r : M \to \{0,1\} \times f(M)$$
$$x \mapsto \begin{cases} (1, x, \bar{x}), & \text{falls } \bar{x} \geq x \\ (0, \bar{x}, x), & \text{falls } x > \bar{x}, \end{cases}$$

wobei

$\bar{x}$ weitere Lösung von $x^2 + bx + c = 0$ ist, wenn x eine solche ist.

Dann:

$$g(r(x)) \overset{\text{Def. } r}{=} \begin{cases} g(1, x, \bar{x}), & \text{falls } \bar{x} \geq x \\ g(0, \bar{x}, x), & \text{falls } \bar{x} < x \end{cases}$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \begin{cases} x, & \text{falls } \bar{x} \geq x, \\ x, & \text{falls } \bar{x} < x \end{cases} = x$$

$$\Rightarrow g \circ r = \mathrm{id}_M$$ ⌋

□

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] := [(ad+bc, bd)]$$

$$\boxed{\overset{?}{\parallel}}$$

$ab' = ba'$

$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

$$[(a',b')] \oplus [(c',d')] = [(a'd'+b'c', b'd')]$$

$\underline{\text{z.z.:}}$ $(ad+bc, bd) \overset{?}{\sim} (a'd'+b'c', b'd')$