Aufgabe 15

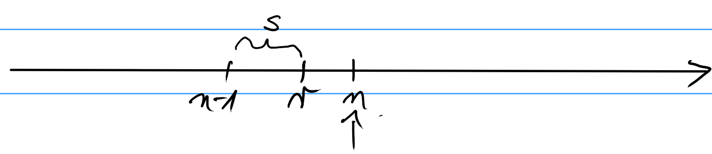
(i) Beh.: $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $s \underset{\mathcal{V}}{\sim} t :\Leftrightarrow s-t \in \mathbb{Q}$
definiert eine 'Ä'-Rel. auf $\mathbb{R}$

Bew.:

- reflexiv: $s \sim s$, denn $s-s = 0 \in \mathbb{Q}$ ✓
- symmetrisch: $s \sim t \Rightarrow s-t \in \mathbb{Q}$
  $\Rightarrow t-s = -(s-t) \in \mathbb{Q} \Rightarrow t \sim s$ ✓
- transitiv: $r \sim s \wedge s \sim t \Rightarrow r-s,\ s-t \in \mathbb{Q}$
  $\Rightarrow \underbrace{(r-s)+(s-t)}_{=r-t} \in \mathbb{Q} \Rightarrow r \sim t$ ✓

(ii) Beh.: $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists s \in (0,1]$: $[r] = [s]$ bzw. $r \sim s$.

Bew.:



Zu $r \in \mathbb{R}$ def. $n \in \mathbb{Z}$ durch

$$n := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq r\},$$

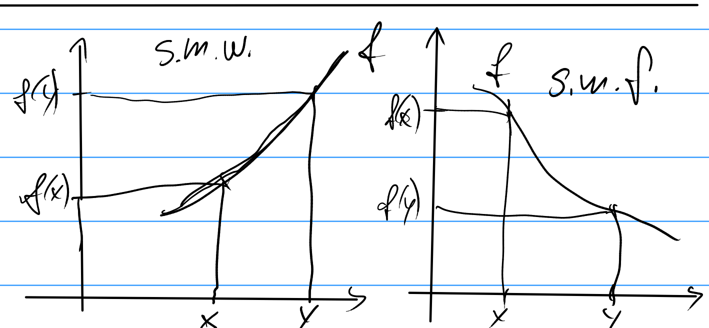
d.h. $n-1 < r \leq n$.

Dann $s := r-(n-1)$, es gilt $s \in (0,1]$,

und $s - r = -n+1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow s \sim r$.

$\square$

Aufgabe 16



f heißt s.m.w. $:\Longleftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}: x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

f heißt s.m.f. $:\Longleftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}: x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$

(i) Beh.: $\forall f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f$ s.m.w. / s.m.f. $\Rightarrow f$ injektiv

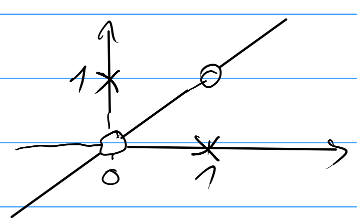
Bew.: z.z.: $\forall x,y\in\mathbb{R}, x\neq y: f(x)\neq f(y)$

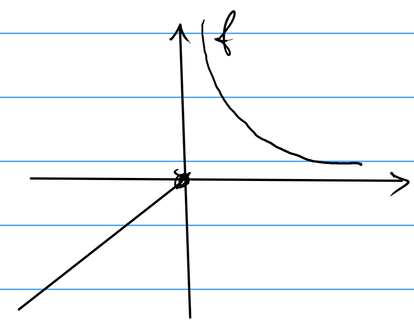
Seien $x,y\in\mathbb{R}$ mit $x\neq y$, dann ist $x<y$ oder $x>y$,
also $f(x)<f(y)$ oder $f(x)>f(y)$, falls f s.m.w.,
und $f(x)>f(y)$ oder $f(x)<f(y)$, falls f s.m.f.

In jedem Fall ist $f(x)\neq f(y)$, also ist f injektiv. $\square$

(ii) Beh.: Nicht jede inj. Fkt. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist s.m.w. oder s.m.f.,
d.h. $\neg(\forall f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f$ inj.: f s.m.w. oder f s.m.f.$)$,
"nicht"
d.h. $\exists f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f$ inj.: $\neg(f$ s.m.w. oder f s.m.f.$)$,
d.h. $\exists f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f$ inj.: f nicht s.m.w. und f nicht s.m.f.
("Konstruktion eines Gegenbeispiels der ursprünglichen Beh.")

Bew.:





Geben eine solche Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an durch

$$f: x \mapsto \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Dann ist f nicht s.m.w., da $1 < 2$ und $\overbrace{f(1)}^{=1} > \overbrace{f(2)}^{=0.5}$

und f nicht s.m.f., da $-1 < 0$ und $\underbrace{f(-1)}_{=-1} < \underbrace{f(0)}_{=0}$.

Weiter ist f injektiv, denn

$x \neq y$, etwa o.B.d.A. sei $x < y$.
ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Dann:
$$\begin{cases} x < y \leq 0 \Rightarrow f(x) = x < y = f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y) \\ x \leq 0 < y \Rightarrow f(x) = x \leq 0 < \frac{1}{y} = f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y) \\ 0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq f(y) = \frac{1}{y} < \frac{1}{x} = f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(y). \end{cases}$$

Also: f injektiv.

$\square$

Aufg. 13 : Geg. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$.

(i) (a) $\exists \bar{a}\in\mathbb{R}\ \forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$
$\underbrace{\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0(\varepsilon)}_{(\forall n\in\{m\in\mathbb{N}\mid m\geq n_0(\varepsilon)\})}: |\bar{a}-a_n|<\varepsilon$

Negation: $\forall \bar{a}\in\mathbb{R}\ \exists \varepsilon>0\ \forall n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$
$\exists n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0(\varepsilon): |\bar{a}-a_n|\geq\varepsilon$

(b) $\forall \varepsilon>0\ \exists n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq n_1(\varepsilon):$
$|a_n-a_m|<\varepsilon$

Negation: $\exists \varepsilon>0\ \forall n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \exists n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq n_1(\varepsilon):$
$|a_n-a_m|\geq\varepsilon$

(ii) (a) $\Rightarrow$ (b)

Bew.: Gelte (a), sei $\varepsilon>0$.
Sei $\bar{a}\in\mathbb{R}$ der GW zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h.
$\forall\tilde{\varepsilon}>0\ \exists n_0(\tilde{\varepsilon}): |\bar{a}-a_n|<\tilde{\varepsilon}$.

Für $n,m\geq n_1(\varepsilon):=n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.
gilt dann:

$$|a_n-a_m|=|a_n-\bar{a}+\bar{a}-a_m|$$
$$\underset{\Delta\text{-Unglg.}}{\leq}|a_n-\bar{a}|+|\bar{a}-a_m|\underset{n,m\geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{<}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\ ✓$$

$\square$

Kgz. von (a_n) $\Rightarrow$ (a_n) ist Cauchyfolge