Hörsaalübung Analysis 1

Metrik: $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, falls
- Definit: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$
- Δ-Unglg.: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Norm: $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, falls ($X$ ein $\mathbb{R}$-VR)
- $\|0\| = 0$, $\|v\| > 0$ falls $v \neq 0$
- $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ falls $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in X$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter VR, so def. $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik

Aufgabe 19

Maximumsmetrik

(i) Vor.: $d_{max}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

Beh.: d_{max} ist Metrik auf $\mathbb{R}^2$

Bew.: • Definitheit: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} = 0$

$\Leftrightarrow |x_1 - y_1| = 0$ und $|x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2 \Leftrightarrow x = y$ ✓

• Symmetrie: $d(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

$\overset{|z|=|-z|}{=} \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$

$= d(y,x)$. ✓

• Δ-Unglg.: $d(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

1. Fall: $|x_1 - y_1| \leq |x_2 - y_2|$:

$d(x,y) = |x_2 - y_2| \underset{\substack{\Delta\text{-Unglg.} \\ \text{für } |\cdot|}}{\leq} |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$

$\leq \max\{|x_2 - z_2|, |x_1 - z_1|\} + \max\{|z_2 - y_2|, |z_1 - y_1|\}$

$= d(x,z) + d(z,y)$. ✓

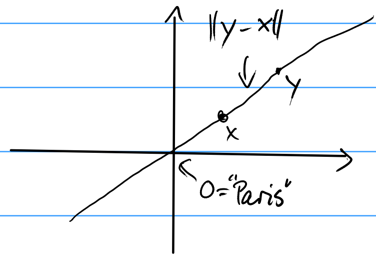
2. Fall: analog durch Vertauschen der Indizes ✓

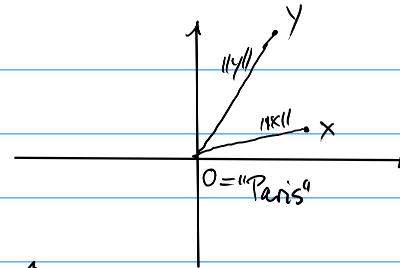
(ii) $d_{SNCF}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

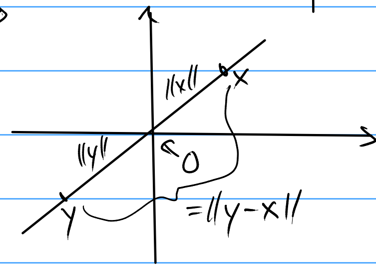
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \|x - y\|, & \text{falls } x = ay \text{ für ein } a > 0 \\ \|x\| + \|y\|, & \text{sonst} \end{cases}$$

hier $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Beh.: d_{SNCF} ist eine Metrik







• Definitheit:

$$d(x,y)=0 \iff \begin{cases} \|x-y\|=0, & \exists a>0: x=ay \\ \|x\|+\|y\|=0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=y, & \exists a>0: x=ay, \\ x=0=y, & \text{sonst} \end{cases} \underline{\underline{\iff}} x=y \quad ✓$$

(für "$\Leftarrow$": ist $x=y=1\cdot y$, liegt 1. Fall vor!)

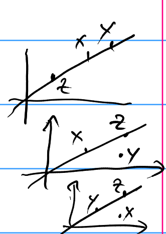
• Symmetrie:

$$d(x,y)=\begin{cases} \|x-y\|, & \exists a>0: x=ay, \\ \|x\|+\|y\|, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \|y-x\|, & \exists a>0: y=\frac{1}{a}\cdot x, \\ \|y\|+\|x\|, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= d(y,x) \quad ✓$$

• $\underline{\Delta\text{-Unglg.}}$: $x,y,z\in\mathbb{R}^2$:

4 Fälle: z.z.: $d(x,y) \overset{!}{\leq} d(x,z)+d(z,y)$



1) $x=az,\ y=bz$: $d(x,y) \overset{\boxed{x=\frac{a}{b}y}}{=} \|x-y\| \leq \|x-z\|+\|z-y\| = d(x,z)+d(z,y)$ ✓

2) $x=az,\ \nexists b>0: y=bz$: $d(x,y) \underset{[x\neq cy,\ \text{sonst}\ y=\frac{a}{c}z\ ↯]}{=} \|x\|+\|y\| = (\|x\|-\|z\|)+\|z\|+\|y\| \leq \underbrace{\|x-z\|+\|z\|}+\underbrace{\|z\|+\|y\|}$

$= d(x,z)+d(z,y)$. ✓

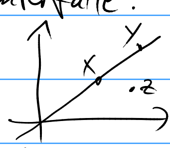
Δ-Unglg. für $\|\cdot\|$: $\underbrace{\|x\|}_{\|(x-z)+z\|} \leq \|z\|+\|x-z\|$

3) $\nexists a>0: x=az,\quad y=bz$: analog

4) $\nexists a>0: x=az,\ \nexists b>0: y=bz$:

2 Unterfälle:

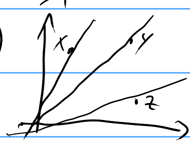
(α)



$\rightsquigarrow d(x,y)=\|x-y\| \underset{\Delta\text{-Unglg.}}{\leq} \|x\|+\|y\| \leq \|x\|+\|z\|+\|y\|+\|z\|$

$= d(x,z)+d(y,z)$ ✓

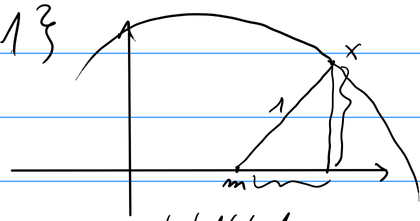
(β)



$\rightsquigarrow d(x,y)=\|x\|+\|y\| \leq \underbrace{\|x\|+\|z\|}_{=d(x,z)} + \underbrace{\|y\|+\|z\|}_{=d(y,z)}$ ✓ □

Einheitskugeln um $m := (\tfrac{1}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$:

$E := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-m\| \leq 1 \}$



$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

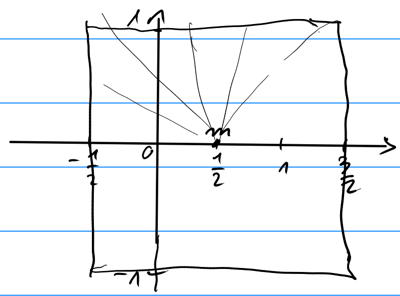
x hat Abst. 1 von m, wenn $(x_1-m_1)^2 + (x_2-m_2)^2 = 1$

$E_{max} := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid d_{max}(x,m) \leq 1 \}$

$d_{max}(x,m) \leq 1 \Leftrightarrow \max\{ |x_1 - \tfrac{1}{2}|, |x_2 - 0| \} \leq 1$

$\Leftrightarrow \underbrace{|x_1 - \tfrac{1}{2}|}_{\max\{x_1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-x_1\}} \leq 1$ und $|x_2| \leq 1 \Leftrightarrow |x_2| \leq 1$ und $x_1 - \tfrac{1}{2} \leq 1$ und $\tfrac{1}{2} - x_1 \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq x_2 \leq 1$ und $\underbrace{x_1 \leq \tfrac{3}{2} \text{ und } x_1 \geq -\tfrac{1}{2}}_{-\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{3}{2}}$



d_{SNCF}: $d(m,x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \|x-m\| \overset{!}{\leq} 1 & \text{, falls } x = am, a>0 \\ \|x\| + \underbrace{\|m\|}_{=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+0^2} = \frac{1}{2}} \leq 1, & \text{sonst} \end{cases}$

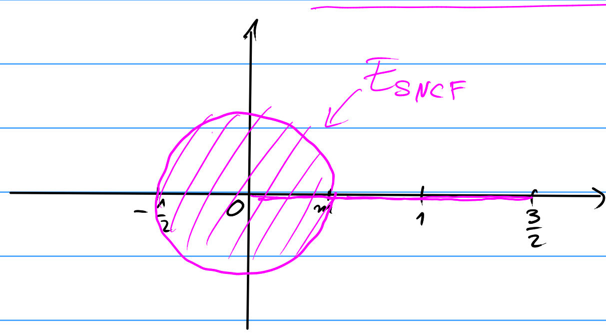
2. Fall: $\sqrt{x_1^2+x_2^2} + \tfrac{1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+x_2^2} \leq \tfrac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ Kreis um 0 mit Radius $\tfrac{1}{2}$

1. Fall: $x = a \cdot (\tfrac{1}{2}, 0)$ für $a>0$

Dann: $\|x-m\| = \|am-m\| = \|(a-1)\cdot m\| = \underbrace{|a-1| \cdot \overbrace{\|m\|}^{1/2}}_{} \overset{!}{\leq} 1,$

d.h. $|a-1| \leq 2 \Leftrightarrow a-1 \leq 2$ und $1-a \leq 2 \Leftrightarrow a \leq 3$ und $a \geq -1$

Erhalten die x mit $x = a \cdot m$ und $a \in]0,3]$,



Aufgabe 20

Sei $CF := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{Q}\}$

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt CF $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \underbrace{\exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n,m\geq n_0(\varepsilon)}_{\text{„für hinreichend große } n,m\text{"}}: |a_m-a_n|<\varepsilon$

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Konvergent gegen $a\in\mathbb{R}$ $:\Leftrightarrow$
$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0(\varepsilon): |a_n-a|<\varepsilon$$
(a heißt GW der Folge)

Kgz. $\Rightarrow$ CF

$\not\Leftarrow$ ⟷ Kgz. $\Leftrightarrow$ CF, falls Vollständigkeit!
(d.h. in $\mathbb{R}$ gilt: CF $\Leftrightarrow$ kgz.)

(i) Vor.: Relation $\sim$ def. durch: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$:\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\forall\varepsilon>0}_{(\varepsilon\in\mathbb{Q})}\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0(\varepsilon): |a_n-b_n|<\varepsilon$$

Beh.: $\sim$ ist Ä-Rel.

Bew.: • reflexiv: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da
$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon):=1\ \forall n\geq n_0(\varepsilon): \overbrace{|a_n-a_n|}^{=0}<\varepsilon \quad ✓$$

• symmetrie: $(a_n)\sim(b_n)$, dann
$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n\geq n_0(\varepsilon): \underbrace{|a_n-b_n|}<\varepsilon$$
$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n\geq n_0(\varepsilon): |b_n-a_n|<\varepsilon, \text{ also } (b_n)\sim(a_n) ✓$$

• transitiv: $(a_n)\sim(b_n)$, $(b_n)\sim(c_n)$.

Dann: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_1(\varepsilon): |a_n-b_n|<\varepsilon,$
$\forall\varepsilon>0\ \exists n_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_2(\varepsilon): |b_n-c_n|<\varepsilon.$

Nun gilt: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)=\max\{n_1(\tfrac{\varepsilon}{2}), n_2(\tfrac{\varepsilon}{2})\}\ \forall n\geq n_0(\varepsilon)$:
$$|a_n-c_n| = |a_n-b_n+b_n-c_n| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|a_n-b_n|}_{<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{für } n\geq n_1(\varepsilon/2)} + \underbrace{|b_n-c_n|}_{<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{für } n\geq n_2(\varepsilon/2)} < \varepsilon \quad ✓$$
$\Rightarrow (a_n)\sim(c_n)$.

(ii) $\mathbb{R} := \{ [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \mid (a_n) \in CF \}$

$\oplus$: $[(a_n)] \oplus [(b_n)] := [(a_n + b_n)]$

$\odot$: $[(a_n)] \odot [(b_n)] := [(a_n \cdot b_n)]$

$\oplus, \odot$ wohldefiniert, $(a_n) \sim (\bar{a}_n)$, $(b_n) \sim (\bar{b}_n)$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_1 \; \forall n \geq n_1 : |a_n - \bar{a}_n| < \varepsilon$

und $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_2(\varepsilon) : |b_n - \bar{b}_n| < \varepsilon$ } Vor.

z.z.: 1) $(a_n + b_n) \sim (\bar{a}_n + \bar{b}_n)$, dann ist

$$[(a_n + b_n)] = [(\bar{a}_n + \bar{b}_n)]$$

z.z.: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : |(a_n + b_n) - (\bar{a}_n + \bar{b}_n)| < \varepsilon$

Bew.: Für $\varepsilon > 0$ sei $n_0 := \max\{n_1(\frac{\varepsilon}{2}), n_2(\frac{\varepsilon}{2})\}$. Dann:

$$|(a_n + b_n) - (\bar{a}_n + \bar{b}_n)| \leq \underbrace{|a_n - \bar{a}_n|}_{< \varepsilon/2 \text{ für } n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})} + \underbrace{|b_n - \bar{b}_n|}_{< \varepsilon/2 \text{ für } n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})} < \varepsilon.$$

✓ □