Hörsaalübung, Blatt 6

Aufgabe 23

Vor.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$

Beh.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt

Wdh.: (a_n) kgt. gegen $a\in\mathbb{R}$ $:\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon>0\ \exists N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N_0(\varepsilon): |a_n-a|<\varepsilon$

(a_n) beschränkt $:\Leftrightarrow \exists C>0\ \forall n\in\mathbb{N}: |a_n|\leq C$
$\Leftrightarrow \exists B_1,B_2\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}: B_1\leq a_n\leq B_2$

$a\in\mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n), falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert

[$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $M\subseteq\mathbb{N}$, abzählbar unendlich mit $M=\{k_1,k_2,k_3,\ldots\}$ mit $k_i\leq k_{i+1}$ $(\forall i)$
sei $(a_n)_{n\in M}$
$:=(a_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$]

$a\in\mathbb{R}$ heißt HP von (a_n), falls es ein $M\subseteq\mathbb{N}$, abzählbar ∞, mit $(a_n)_{n\in M}$ kgt. gegen a

Ist $M=\{k_1,k_2,\ldots\}$, so heißt das, daß $a_{k_i}\xrightarrow{i\to\infty} a$.

Satz von Bolzano-Weierstraß:
Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

„$\Rightarrow$": Sei a der GW der Folge.

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \ \forall n \geq n_0(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$,

also $a_n - a \leq |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n \leq a + \varepsilon$
und $-a_n + a \leq |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n \geq a - \varepsilon$

Sei $\bar{a} := \max\{a_1, \ldots, a_{n_0}\}$, $\underline{a} := \min\{a_1, \ldots, a_{n_0}\}$,

dann: $\forall n \in \mathbb{N}: \min\{\underline{a}, a - \varepsilon\} \leq a_n \leq \max\{\bar{a}, a + \varepsilon\}$,
d.h. (a_n) ist beschränkt.

- Weiter ist a ein HP von (a_n), da offenbar eine Teilfolge (nämlich (a_n) selbst!) gegen a konvergiert.
Einen weiteren HP $b \neq a$ kann es nicht geben, denn sonst wäre

$$0 < \underbrace{|b-a|}_{=|(b-a_{n_j})+(a_{n_j}-a_{n_i})+(a_{n_i}-a)|} \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|a_{n_i} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|b - a_{n_j}|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|a_{n_j} - a_{n_i}|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

für i groß, da $a_n \to a$

für j groß genug und $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \to b$

für i, j groß, da (a_n) eine Cauchy-Folge

für jedes $\varepsilon > 0$ wahr, $\lightning$ aber für $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ kann diese Ungl. nicht stimmen! $\square$

$$0 < |b-a| = |b - a_{n_j} + a_{n_j} - a| \leq \underbrace{|b - a_{n_j}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_j} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } j \text{ groß}} < \varepsilon$$

✓

„$\Leftarrow$": Sei (a_n) beschr., a sei der eindeutige HP.

Z.z.: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$

Ann.: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0(\varepsilon): |a_n - a| \geq \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ derart. Zu $k \in \mathbb{N}$ $\exists n_k \geq k$: $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$.

Betr. die Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, sie ist beschränkt, da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Nach B-W enthält $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$, deren GW ist auch a nach Vor. (der Eind. des HP).

Aber es gilt: $|a_{n_{k_l}} - a| \geq \varepsilon$ für alle l, so daß a doch nicht GW von $(a_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ sein kann, $\lightning$. $\square$

Aufgabe 24

Beh.: Jede Cauchyfolge reeller Zahlen konvergiert in $\mathbb{R}$, d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\Rightarrow$ (a_n) kgt. gegen ein $a \in \mathbb{R}$

Bew.: Sei (a_n) eine CF,
d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall m,n > n_0(\varepsilon): |a_m - a_n| < \varepsilon$

CF $\Rightarrow$ beschr.:

- (a_n) ist beschr.: Für $\varepsilon = 1$ ex. $n_0(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < 1$ für $m,n > n_0(1)$.

Also: $|a_m| - |a_n| \underset{\Delta\text{-Ungl'g.}}{\leq} |a_m - a_n| < 1$.

$\ulcorner |a_m| = |(a_m - a_n) + a_n| \leq |a_m - a_n| + |a_n| \overset{|-|a_n|}{\Rightarrow} |a_m| - |a_n| \leq |a_m - a_n| \lrcorner$

Für $N := n_0(1) + 1$, $m > n_0(1)$: $|a_m| < 1 + |a_N|$,

also $\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_N|\}$.

- Nach B-W, da (a_n) beschr.,
hat (a_n) eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$,

ihr GW sei $a \in \mathbb{R}$.

Dann strebt auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a,
d.h.
z.z.: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $n_1(\varepsilon)$ so, daß $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m,n \geq n_1(\varepsilon)$, da (a_n) CF.

Sei $N > n_1(\varepsilon)$ mit $|a_N - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, da $a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$.

Dann: $\forall n \geq n_1(\varepsilon): |a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_N|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|a_N - a|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$. $\square$

$\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ abs. Kgt.

Cauchyprodukt: $\left(\sum_n a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_n b_n x^n\right) = \sum_n c_n x^n$

wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $\tilde{c}_n = \sum_{k \cdot l = n} a_k b_l$

$n=0$: $c_0 = a_0 b_0$
$n=1$: $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$
$n=2$: $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$
$\vdots$

$\sum a_n$ abs. Kgt. $:\Longleftrightarrow \sum |a_n|$ Kgt.

Bsp.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Kgt. ✓ nach Leibnizkriterium

nicht abs. Kgt., denn $\sum \frac{1}{n}$ divergiert!

$\sum a_n$ abs. Kgt. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\sum a_n$ Kgt.