Zentralübung zu Blatt 7

Aufgabe 27

(i) Vor.: $x \in \mathbb{R}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen,

für $M, N \in \mathbb{N}$ def. endlichen Summen

$$\sum_{k=0}^{M} a_k x^k \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=0}^{N} b_\ell x^\ell,$$

multiplizieren diese zum Produkt

$$\left(\sum_{k=0}^{M} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{N} b_\ell x^\ell\right) =: \sum_{n=0}^{N+M} c_n x^n$$

Beh.: $$c_n = \sum_{\substack{k,\ell \\ 0\le k\le M \\ 0\le \ell\le N \\ k+\ell=n}} a_k b_\ell = \sum_{\substack{k \\ 0\le k\le M \\ \underbrace{0\le n-k\le N}_{\Leftrightarrow\, n-N\le k\le n}}} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{k\ge \max(0,n-N), \\ k\le \min(M,n)}} a_k b_{n-k}$$

$$= \sum_{k=\max(0,n-N)}^{\min(M,n)} a_k b_{n-k}.$$

Bew.: Laut Def.

$$\sum_{n=0}^{N+M} c_n x^n = \sum_{\substack{0\le k\le M \\ 0\le \ell\le N}} a_k b_\ell \, x^{k+\ell} \underset{n=k+\ell}{=} \sum_{n=0}^{N+M} \underbrace{\left(\sum_{\substack{k+\ell=n \\ 0\le k\le M \\ 0\le \ell\le N}} a_k b_\ell\right)}_{\Rightarrow \text{das ist } c_n} x^n.$$

$\square$

Zu (ii): Sei $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ ← alternierende Nullfolge, $|a_n| = |b_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ monoton fallend

Nach Leibniz ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ konvergent.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist nicht absolut konvergent,

da $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ divergent,

denn $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{n+1}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.
(harmonische Reihe)

Das Cauchyprodukt der beiden Reihen ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$,

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot (-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}},$$

($\sum c_k$ kgt. $\Rightarrow (c_k)$ Nullfolge, d.h.
(c_k) keine Nullfolge $\Longrightarrow \sum c_k$ div.)

für gerades n ist $c_n \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k+1+n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2}$

$\Rightarrow c_n = \underbrace{\frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \dots + \frac{2}{n+2}}_{n+1 \text{ mal}}$ $\quad \to \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ← Unglg. vom geom. + arithm. Mittel

Also: $c_n \geq (n+1)\cdot\frac{2}{n+2} = 2\cdot\frac{n+2-1}{n+2} = 2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$

$\geq 2\cdot\frac{1}{2} = 1$ für alle $n\geq 0$, n gerade,

demnach ist $\sum c_n$ divergent, da (c_n) keine Nullfolge. $\square$

Aufgabe 28

Riemannscher Umordnungssatz:

Vor.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Kgt., aber nicht absolut Kgt.

Beh.: $\forall c\in\mathbb{R}\ \exists$ Bijektion: $\tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = c.$$

Bew.:

(i) O.B.d.A. seien alle $a_n \neq 0$.

Man $p_n := \begin{cases} a_n, & \text{falls } a_n>0,\\ 0, & \text{sonst},\end{cases}$ $\quad q_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } a_n>0,\\ -a_n, & \text{falls } a_n<0,\end{cases}$

haben $a_n = p_n - q_n$, $|a_n| = p_n + q_n$.

Beh.: Die Reihen $\sum_n p_n$ und $\sum_n q_n$ divergieren.

Bew.: Ist $\sum p_n$ kgt., so ist $\sum q_n = \sum p_n - \sum a_n$ kgt.
Ist $\sum q_n$ kgt., so ist $\sum p_n = \sum q_n + \sum a_n$ kgt.

Beh.: $\sum p_n, \sum q_n$ sind nicht beide kgt.

Bew: Sonst wäre

$$\sum p_n + \sum q_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ auch konvergent,}$$

↯ zur Vor., daß $\sum |a_n|$ divergiert. □

Also divergieren beide, d.h. $\sum p_n, \sum q_n \to \infty$. □

(ii) Konstruiere eine Folge $(a_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:

① Summiere solange Folgenglieder aus (p_n), bis Summe $> c$:
$k_1 := \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid p_1 + p_2 + \ldots + p_\ell > c\}$
Dann setze $s_1 := p_1 + \ldots + p_{k_1}$.

② Summiere solange Folgenglieder aus $(-q_n)$ zu s_1, bis Summe $< c$:
$k_2 := \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid s_1 - q_1 - \ldots - q_\ell < c\}$
Dann setze $s_2 := s_1 - q_1 - \ldots - q_{k_2}$.

③ Summiere solange Folgenglieder aus (p_n), zu s_2 bis Summe $> c$:
$k_3 := \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid s_2 + p_{k_1+1} + \ldots + p_\ell > c\}$
Dann setze $s_3 := s_2 + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_3}$.

④ Summiere solange Folgenglieder aus $(-q_n)$ zu s_3, bis Summe $< c$:
$k_4 := \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid s_3 - q_{k_2+1} - \ldots - q_\ell < c\}$
Dann setze $s_4 := s_3 - q_{k_2+1} - \ldots - q_{k_4}$

Die Folgenglieder von (p_n) und (q_n) kommen alle der Reihe nach zum Zug, alle Folgenglieder von (a_n) werden dabei als Summanden aufgezählt, man erhält eine Umordnung $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$.

(iii) <u>Beh.:</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ kgt. gegen c.

<u>Bew.:</u> Aufgrund der Konstruktion sind s_i Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$, und es gilt:

$$\begin{cases} s_i - p_{k_i-1} < c, \quad \text{also} \quad s_i - c < p_{k_i-1} \to 0, & \text{falls } s_i > c, \\ s_i - q_{k_i-1} > c, \quad \text{also} \quad c - s_i < -q_{k_i-1} \to 0, & \text{falls } s_i < c, \end{cases}$$

Da $(p_n), (q_n) \to 0$, folgt $|s_i - c| \xrightarrow{i \to \infty} 0$,

$$c = \lim_{i\to\infty} s_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}. \qquad \square$$

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$a^x := \exp_a(x) := \exp(x \log a)$$

$$a^x = b \overset{1.)}{\iff} \log a^x = \log b \iff x \log a = \log b$$

$$\overset{2.)}{\iff} \exp(x \log a) = \exp(\log b)$$

$$\iff x \log a = \log b$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \log n\right) = \exp\Big(\underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\Big)$$

$$\exp\Big(\underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\to 0}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(0) = 1$$

da exp stetig

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \Big(\underbrace{\sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}}_{=: b_k}\Big)$$