Zentralübung zu Blatt 8

Aufgabe 31

(i) Beh.: Sei $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann: $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Bew.: Nach Vor. ist $a_n \to 0$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq k: \ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \leftarrow (*)$$

Dann gilt: $\forall n > k: \ \frac{|a_{k+1} + \ldots + a_n|}{n} \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{|a_{k+1}| + \ldots + |a_n|}{n}$ (1)

$$\leq \frac{\sum_{\ell=k+1}^{n} |a_\ell|}{n} \leq \frac{(n-k)\cdot\frac{\varepsilon}{2}}{n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

und $\frac{|a_1 + \ldots + a_k|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ für n groß. (2)

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Dann gilt für n mind. so groß wie $k+1$:

$$\left|\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{a_1 + \ldots + a_k}{n}\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ nach (2)}} + \underbrace{\left|\frac{a_{k+1} + \ldots + a_n}{n}\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ nach (1)}} < \varepsilon.$$

$\square$

(ii) Beh.: Sei $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathbb{R}$. Dann: $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Bew.: $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge, wegen (i) folgt: $0 \leftarrow \frac{(a_1-a)+\dots+(a_n-a)}{n} = \frac{a_1+\dots+a_n - n\cdot a}{n}$

$= \frac{a_1+\dots+a_n}{n} - a$, also: $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \longrightarrow a$. $\square$

(iii) <u>Beh.:</u> $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Kgt. mit GW 1, die $a_n \geq 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.
Dann: $(\sqrt[n]{a_1\cdot\dots\cdot a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ Kgt. mit GW 1.

<u>Bew.:</u> Es gilt:

$$\underbrace{0 \leq}_{\text{alle } a_i \geq 1} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} - 1 \underbrace{\leq}_{\text{UGAM}} \frac{a_1+\dots+a_n}{n} - 1 \underbrace{\xrightarrow{n\to\infty}}_{(i)} 0,$$

also $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. $\square$

(iv) <u>Beh.:</u> $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

$n^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\log n)$
$= \sqrt[n]{n}$
(d.h. Lsg. von $x^n = n$)

<u>Bew.:</u> Sei $a_n := \frac{n}{n-1}$ für $n\geq 2$,
$a_1 := 1$.

Haben: $a_n = \frac{n}{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$, da $(\frac{1}{n})$ Nullfolge.

Dann:
$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\dots\cdot\frac{n}{n-1}} = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \underbrace{\xrightarrow{n\to\infty}}_{(iii)} 1.$$
$\square$

<u>Bem.:</u> $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \exp(\underbrace{\tfrac{1}{n}\cdot\log n}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ (de l'Hopital, später)}}) \overset{\text{Stetigkeit von exp}}{\longrightarrow} \exp(0) = 1$.

Supremum: Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ beschr., dann ist
$$\sup A = \min \{ M \in \mathbb{R} \mid \underbrace{\forall a \in A : a \leq M}_{\text{d.h. } M \text{ ist obere Schranke}} \}$$

Sind $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ beschr., so ist $\sup A \leq \sup B$.

lim sup: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschr. Folge, dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n) := \lim_{k\to\infty} \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sup\{a_l \mid l \geq k\}$$

Mit $b_k := \sup\{a_l \mid l \geq k\}$ ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$.

$b_k \geq b_{k+1}$, da $\sup\{a_k, a_{k+1}, \ldots\} \geq \sup\{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$,

d.h. die (b_k) sind monoton fallend und beschränkt.

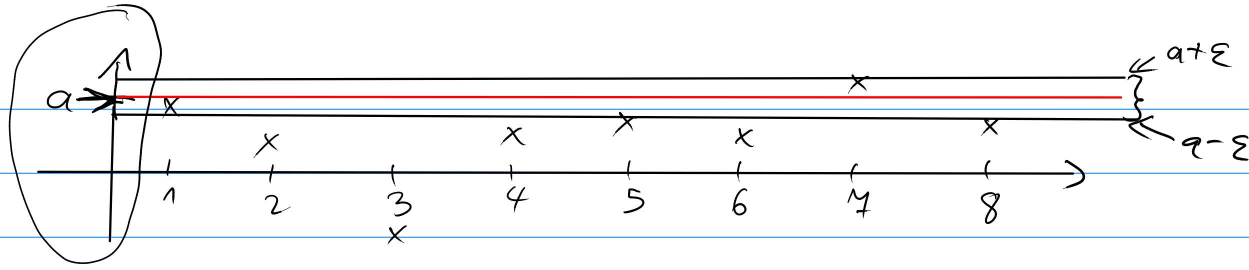
Bem.: $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n) \leq \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$

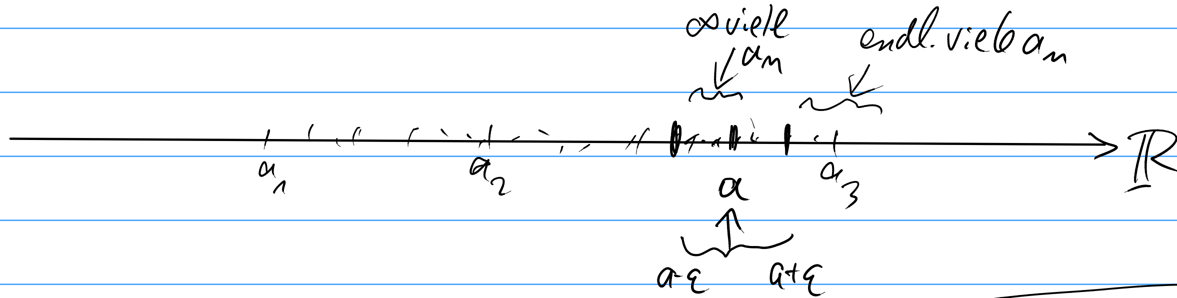
Bem.: Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschr. Dann:

$a = \limsup\limits_{k\to\infty} (a_k) \iff a$ ist der größte Häufungspunkt

(Erinnerung: Häufungspunkt = GW einer konvergenten Teilfolge)

$\iff \forall \varepsilon > 0$: $a_n > a - \varepsilon$ für ∞ viele n ①
und $a_n > a + \varepsilon$ für höchstens endl. viele n ②





$$a_n = \begin{cases} (-1)^n, & n>1 \\ 2, & n=1 \end{cases}$$
$\to \sup(a_n) = 2$
$\limsup(a_n) = 1$

Aufgabe 32

Vor.: $(a_n), (b_n)$ beschr., $c_n := a_n + b_n$

Beh.: $\limsup c_n = \limsup a_n + \limsup b_n$

Diese Beh. ist falsch!

Gegenbsp.: $a_n := (-1)^n$, $b_n := 2 \cdot (-1)^{n+1}$,

d.h. $\limsup a_n = 1$, $\limsup b_n = 2$.

Hier ist $c_n = a_n + b_n = (-1)^n + 2 \cdot (-1)^{n+1}$
$= (-1)^n \cdot (1-2) = (-1)^{n+1}$,

also $\limsup c_n = 1 \neq 3 = \limsup a_n + \limsup b_n$. $\square$

Beh.: $\limsup c_n \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.

Bew.:

Haben: $\limsup a_n = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\{a_\ell \mid \ell \geq k\}$,

$\limsup b_n = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\{b_\ell \mid \ell \geq k\}$.

Dann: $(d_k)_{k\in\mathbb{N}} := \left(\sup\{a_\ell \mid \ell \geq k\} + \sup\{b_\ell \mid \ell \geq k\}\right)_{k\in\mathbb{N}}$

konvergent mit GW $\limsup a_n + \limsup b_n$ nach GWS,

d.h. $$\lim d_k = \limsup a_n + \limsup b_n$$

und da $$\sup\{a_\ell + b_\ell \mid \ell \geq k\} \leq \sup\left(\{a_\ell \mid \ell \geq k\} + \{b_\ell \mid \ell \geq k\}\right) = d_k,$$

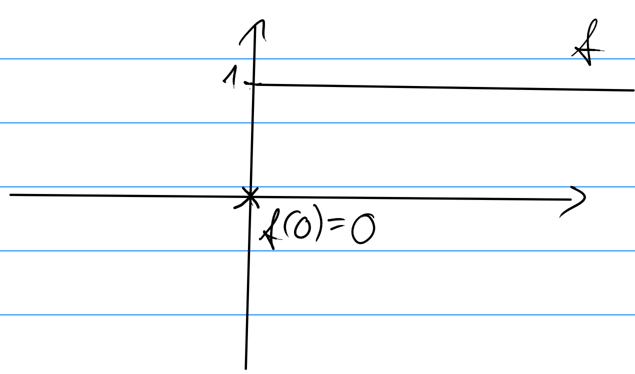
$\boxed{A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B}$

d.h. $$\underbrace{\lim_{k\to\infty} \sup\{a_\ell + b_\ell \mid \ell \geq k\}}_{= \limsup\limits_{n\to\infty} c_n} \leq \lim_{k\to\infty} d_k = \limsup a_n + \limsup b_n.$$

$\square$

$f: D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$

f ist <u>stetig</u> $a \in D$ $:\Longleftrightarrow$ $\forall a_n \to a : f(a_n) \to f(a)$.



$$f(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

f ist unstetig in $a = 0$, denn:

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$, aber $f(a_n) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ und $f(0) = 0$ ↯

$f(x) = \exp(2^x \log x), \quad x > 0$