Zentralübung zu Blatt 9

Aufgabe 36

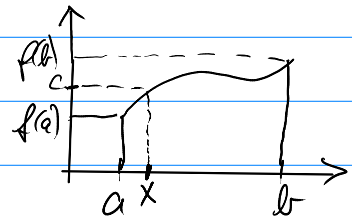
Der Brouwerschen Fixpunktsatz in Dimension 1:

Vor.: $I := [0,1]$, $f: I \to I$ stetig.

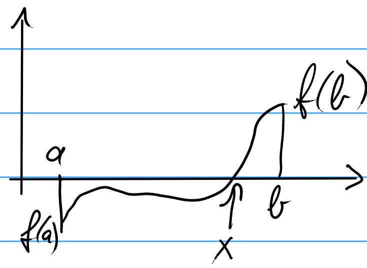
Beh.: $\exists x \in I : f(x) = x$, d.h. x ist Fixpunkt.

Gegenteil: $\forall x \in I : f(x) \neq x$

ZWS: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann wird jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ angenommen, d.h. ist $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$ bzw. $f(b) \leq c \leq f(a)$, dann ex. $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$.



Alternative Formulierung:
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \leq 0$, $f(b) \geq 0$.
Dann ex. $x \in [a,b]$: $f(x) = 0$



Bew.: Sei $g := f - id_I$, d.h. $g: [0,1] \to \mathbb{R}$,
$g(x) := f(x) - x$.

Dann ist g stetig, da f stetig.
Weiter ist $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$

ZWS

$\Rightarrow \exists x \in I : g(x) = 0$, d.h. $f(x) - x = 0$,

also $f(x) = x$. $\square$

2. Beh.: Obige Beh. ist falsch für $I :=]0,1[$:

Gegenbeispiel: Betr. $f:]0,1[\to]0,1[$, $x \mapsto f(x) = x^2$
ist stetig und fixpunktlos wegen

$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$, aber $0,1 \notin]0,1[$.

3. Beh.: Obige Beh. ist falsch für $I := \mathbb{R}$:

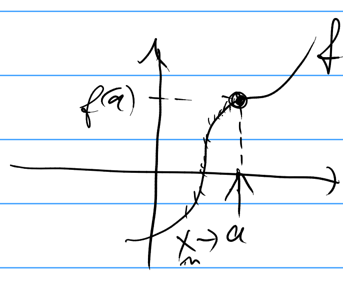
Gegenbeispiel: Betr. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$, stetig und fixpunktlos

$(x+1 = x \Leftrightarrow 0 = 1$ ↯ $)$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ist der Grenzwert von $f(x_n)$ für $n \to \infty$, wenn (x_n) eine beliebige Folge ist, die gegen a konvergiert

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $a \in D$,

falls $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,



d.h. $\forall (x_n)_{n}$ Kgt. gegen a: $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Kgt. gegen $f(a)$. $\Leftarrow$

Alternativ: ε-δ-Stetigkeit:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ $\Leftarrow$

Aufgabe 35

(i) Beh.: $\forall a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}: \lim\limits_{x\to a} \frac{x^k - a^k}{x-a} = k a^{k-1}$.

geom. Σ: $t \neq 1 \Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{\ell=0}^{k-1} t^\ell = \frac{t^k - 1}{t-1}}$$

Bew.:

$$\frac{x^k - a^k}{x-a} = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^k - 1}{\frac{x}{a^k} - \frac{1}{a^{k-1}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^k - 1}{\left(\frac{x}{a} - 1\right)\cdot \frac{1}{a^{k-1}}} = a^{k-1} \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^k - 1}{\frac{x}{a} - 1}$$

$$\underset{\text{geom. }\Sigma}{=} a^{k-1} \cdot \sum_{\ell=0}^{k-1} \underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)^\ell}_{\xrightarrow{x\to a} 1} \xrightarrow{x \to a} \underline{\underline{a^{k-1}\cdot k}}.$$

(ii) Beh.: $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{12}{8-x^3} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.

Bew.:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{12}{8-x^3} \underset{\uparrow}{=} \frac{(-x^2-2x-4)+12}{-(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}$$

$$8-x^3 = (x-2)\cdot(-x^2-2x-4)$$

$$= \frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{(x-2)\cdot(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x+4}{x^2+2x+4} \xrightarrow{x\to 2} \frac{6}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$ □

(iii) Beh.: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Bew.:

$$x \neq 0 \rightsquigarrow \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{x\to 0} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$ □

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2-1+1} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-(1-x^2)} = \frac{\cancel{1-\sqrt{\ldots}}}{(\cancel{1-\sqrt{1-x^2}})(1+\sqrt{\ldots})}.$$

(iv) Beh.: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$

Bew.: $\frac{x^2}{|x|} \underset{\boxed{x\in\mathbb{R}}}{=} \frac{|x|^2}{|x|} = |x| \xrightarrow{x\to 0} 0$ □

$x \in \mathbb{C}$, $x = r\cdot e^{i\varphi}$, $r = |x|$

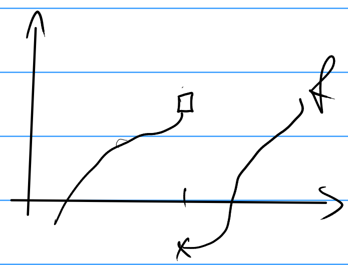
$$\frac{x^2}{|x|} = \frac{r^2 \cdot e^{2i\varphi}}{r} = \underset{\substack{\downarrow x\to 0\\ 0}}{r}\cdot \underbrace{e^{2i\varphi}}_{\text{beschr.}} \xrightarrow[r\to 0]{x\to 0} 0$$

$$(x_n) \subseteq \mathbb{C},\ \underbrace{x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0} \Rightarrow \underbrace{|x_n|}_{=\sqrt{\mathrm{Re}^2 x_n + \mathrm{Im}^2 x_n}} \to 0$$

f ist stetig in a $\iff$ $\underbrace{\lim_{x \downarrow a} f(x)}_{\text{rechtsseitiger GW}} = \underbrace{\lim_{x \uparrow a} f(x)}_{\text{linksseitiger GW}} = f(a)$

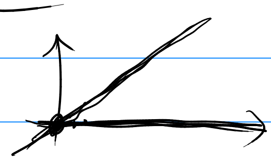
rechtsseitiger GW auch notierbar als:

$$\lim_{x \to a+} f(x), \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), \quad \lim_{x \searrow a} f(x)$$



Aufgabe 34

(iii) Beh.: $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$



ist stetig genau in $x = 0$

Bew.: • Stetigkeit in $x = 0$: Sei (x_n) eine Nullfolge.
Dann ist:
Für alle $x_n \in \mathbb{Q}$ ist $r(x_n) = x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0 = r(0)$,
und für $x_n \notin \mathbb{Q}$ ist $r(x_n) = 0 \xrightarrow{n \to \infty} 0 = r(0)$.
Also: $r(x_n) \longrightarrow 0 = r(0)$.

Genau: Weil (x_n) Nullfolge ist, gilt $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N: |x_n| < \varepsilon$
Dann: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N: |r(x_n)| = \begin{cases} |x_n|, & x_n \in \mathbb{Q} \\ 0, & x_n \notin \mathbb{Q} \end{cases} \leq |x_n| < \varepsilon$,
also ist auch $r(x_n)$ Nullfolge.

- Unstetigkeit in $a \neq 0$:

Z.z.: $\exists (x_n), x_n \to a: r(x_n) \not\to \underline{r(a)}$

1. Fall: $a \in \mathbb{Q}$.

Dann: $\underbrace{x_n := a + \frac{\sqrt{2}}{n}}_{\notin \mathbb{Q}} \xrightarrow{n\to\infty} a$,

aber $r(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq a = r(a)$.

2. Fall: $a \notin \mathbb{Q}$. Dann ist $r(a) = 0$.

Sei $x_n := \lfloor 10^n \cdot a \rfloor \cdot 10^{-n} \in \mathbb{Q}$

$a = 1{,}23456\ldots$

$x_1 = 1$

$x_2 = 1{,}2$, $x_3 = 1{,}23$ ...

Dann: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, da die (x_n) die Zahl a approximieren in ihrer Dezimalentwicklung.

Dann: $r(x_n) = x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \neq 0 = r(a)$. $\square$

(iv)

$$g(x) := \begin{cases} x\, f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$f(x) \in]-1, 1[$

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig

1. Beh.: f ist stetig auf $\mathbb{R}$

$g(x_n) = \underbrace{x_n}_{\to 0} \underbrace{f\left(\frac{1}{x_n}\right)}_{\text{beschr.}} \longrightarrow 0$