Definitionen und Bemerkungen: Mehrdimensionale Ableitungen

1) **Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen:** Geg. $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

Def. von $D_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

- **Def.:** Für $x \in U$ sei $D_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+he_i) - f(x)\right)$,
  wo e_i der i-te Einheitsvektor ist, $1 \le i \le n$.
  $D_i f(x)$ heißt i-te partielle Ableitung von f in x.

- **Bem.:** Für $x \in U$ fest, $x = (x_1, \dots, x_n)$, gilt
  $$D_i f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\hat{f}_i(x_i + h) - \hat{f}_i(x_i)\right) = \hat{f}_i{}'(x_i),$$
  wobei $\hat{f}_i : U_i \to \mathbb{R}$, $\hat{f}_i(\xi) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $(U_i \subset \mathbb{R})$,
  die Funktion ist, die von f bei festgehaltenen Koordinaten $x_j \neq x_i$
  in die i-te Richtung induziert wird. (Nicht die i-te Komponentenfkt., s.u.!)
  Daher berechnet man $D_i f(x)$ durch Ableiten nach der Variablen x_i,
  wenn die anderen x_j festgehalten bleiben (und "wie eine Konstante behandelt" werden).

Def. von $D_v f(x)$

- **Def.:** Für $v \in \mathbb{R}^n$ $\|v\| = 1$, sei $D_v f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+hv) - f(x)\right)$
  die Richtungsableitung von f in x
  in Richtung v. $\to$ $D_i f(x)$ ist die Richtungsabl. in Richtung e_i

- **Def.:** $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, heißt partiell diff'bar, falls alle $D_i f(x)$ ex.
  " " " stetig partiell diff'bar, " " ex. und stetig.
  " " " in Richtung v diff'bar, falls $D_v f(x)$ ex.

- **Bem.:** partiell diff'bar $\not\Rightarrow$ stetig (vgl. Aufg. 14)
  Obige Definitionen sind auch für Funktionen $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, machbar.

Def. von $D_i^k f(x)$, $D_i D_j f(x)$ usw.

- **Def.:** Höhere partielle Ableitungen: $D_i^k f(x) := D_i\left(D_i^{k-1} f\right)(x)$, $D_i^0 f(x) = f(x)$.
  Gemischte: $D_i D_j f(x)$ für: erst nach x_j, dann nach x_i ableiten, usw.
  Satz von Schwarz: f 2mal st. partiell db. $\Rightarrow$ $D_i D_j f(x) = D_j D_i f(x)$ (vgl. Aufg. 15)

2) Spezielle Ableitungskonstrukte: grad, div, rot, ∇ (Nabla), Δ (Laplace).

Def. grad $f(x)$ (Vektorfeld)

• **Def.:** Geg. $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, f partiell diff'bar.

$$\operatorname{grad} f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = (D_1 f(x), \dots, D_n f(x))$$

heißt Gradient von f in $x \in U$. (Zeilenvektor)

(falls $\neq 0$)

• **Bem.:** Für $a \in U$ ist $\operatorname{grad} f(a)$ die Richtung maximaler Steigung von f in a. Diese Steigung beträgt (im Betrag) $\|\operatorname{grad} f(a)\|_2$. (*) (s.u.)

Def. ∇

• **Def.:** Schreiben auch $\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x)$,

$\nabla := (D_1, \dots, D_n)$ ist ein "Operator" names Nabla und dient zur abkürzenden Notation.

• **Def.:** Eine Funktion $v: U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt auch Vektorfeld.

Bsp.: $\operatorname{grad} f: U \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \operatorname{grad} f(x)$. (Ein $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, heißt auch Skalarfeld.)

Def. v_i

• **Def.:** Geg. Vektorfeld $v: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

Die i-te Komponentenfunktion ist $v_i := pr_i \circ v$, wo $pr_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i$, die i-te Projektion bezeichnet.

Def. div v (Skalarfeld)

• **Def.:** Geg. $v: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, v partiell diff'bar (d.h. alle v_i partiell diff'bar).

$$\operatorname{div} v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$$ heißt Divergenz von v.

Skalarprodukt (euklidisches)

• **Bem.:** Abkürzend mit ∇ schreibbar: $\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle$

Haben: $\operatorname{div}(fv) = \langle \operatorname{grad} f, v \rangle + f \operatorname{div} v$ bzw. $\langle \nabla, fv \rangle = \langle \nabla f, v \rangle + f \langle \nabla, v \rangle$

Def. rot v (Vektorfeld)

• **Def.** Geg. $v: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$, v partiell diff'bar. $\operatorname{rot} v: U \to \mathbb{R}^3$,

$x \mapsto \operatorname{rot} v(x) := (\nabla \times v)(x) := (D_2 v_3 - D_3 v_2, D_3 v_1 - D_1 v_3, D_1 v_2 - D_2 v_1)$

heißt Rotation von v.

• **Bem.:** $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^3$, f 2mal st. partiell diff'bar $\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$.

Def. Δf (Skalarfeld)

• **Def:** Geg. $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, f 2mal st. partiell db.

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = D_1^2 f + \ldots + D_n^2 f : U \to \mathbb{R}$$

heißt Laplace von f.

$$\Delta := D_1^2 + \ldots + D_n^2 = \langle \nabla, \nabla \rangle$$ heißt Laplace-Operator.

3) (Totale) Ableitung: Geg. $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Die i-te Komponentenfkt. ist $f_i := pr_i \circ f$, $1 \le i \le m$.

• **Def:** f in $x \in U$ diff'bar

$$:\Leftrightarrow \exists A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m): f(x+\xi) = f(x) + A(\xi) + o(\|\xi\|),$$

wobei

Def. o-Symbol

$o(\|\xi\|) = \varphi(\xi)$ eine Fkt. $\varphi: V \to \mathbb{R}^m$, $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$, ist mit $\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$.

Def. $f'(x)$

• Die lineare Abb. A kann bzgl. der Standardbasen eind. als Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

dargestellt werden, diese heißt

Differential/Funktional-Matrix/Jacobi-Matrix/Ableitung von f in x,

Def. $Df(x)$

Notation: $Df(x) := J_f(x) := f'(x) := \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

es gilt:

$$a_{ij} = D_j f_i(x). \qquad [\text{Fall } m=1: Df(x) = \operatorname{grad} f(x).]$$

Haben: $(D_1 f_i(x), \ldots, D_n f_i(x)) = \operatorname{grad} f_i(x) \quad 1 \le i \le m$.

• Schreiben dann auch $A \cdot \xi = Df(x) \cdot \xi$ (das Matrixprodukt!) für $A(\xi) = f'(x) \cdot \xi$ in der Def. von "f diff'bar". Insb.: $m=1 \leadsto Df(x) \cdot \xi = \operatorname{grad} f(x) \xi = \langle \operatorname{grad} f(x)^T, \xi \rangle$

$$= (D_1 f(x), \ldots, D_n f(x)) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = D_1 f(x) \xi_1 + \ldots + D_n f(x) \xi_n$$

• **Bem:** Haben also: $(D_j f)(x) = f'(x)(e_j)$ ist die j-te Spalte von $Df(x)$ und $\operatorname{grad} f_i(x)$ ist die i-te Zeile von $Df(x)$.

• **Bem:** Für $m=n$ ist f ein Vektorfeld, dann ist

$$\operatorname{div} f(a) = \langle \nabla, f \rangle (a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i(a) = \operatorname{spur} f'(a).$$

- Ist f diff'bar in x und $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|=1$, so ist $(D_v f)(a) = \underline{\underline{Df(x)}} \cdot v = f'(x)(v)$

- Bem.: Für $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, betr. $\Gamma_f := \{ \binom{x}{f(x)} \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in U \}$, i.e. der Graph von f.

  Dann:
  $$f(x+\xi) = \underbrace{f(x) + \operatorname{grad} f(x) \cdot \xi}_{\text{gibt lineare Approximation für } f \text{ an } x,} + o(\|\xi\|), \text{ für alle } \xi \text{ nahe } 0.$$
  d.h. $\xi_{n+1} = f(x) + \operatorname{grad} f(x) \cdot \xi$ ist Tangential(hyper)ebene von f in x im $\mathbb{R}^{n+1}$

  Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\binom{x}{y} = x^2 + y^2 - 1 \rightsquigarrow \operatorname{grad} f\binom{x}{y} = (2x, 2y)$, insb. $\operatorname{grad} f\binom{1}{2} = (2,4)$
  Dann: $z = f(1,2) + (2,4) \cdot (x-1, y-2)^T = 4 + 2(x-1) + 4(y-2) = 2x + 4y - 6$
  ist Tangentialebene von f in $a = \binom{1}{2}$ im $\mathbb{R}^3$

- Bem.: st. partiell db $\underset{\not\Leftarrow \text{ : s. Aufg 18}}{\Rightarrow}$ db $\Rightarrow$ stetig, $\Rightarrow$ partiell db, und: f in x db $\Leftrightarrow$ alle f_i in x db

- Kettenregel: Vor.: $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$, $V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$, f in $x \in U$ db, g in $f(x) \in V$ db

  Beh.: $g \circ f$ in x db, $\underbrace{D(g\circ f)(x)}_{\in \mathbb{R}^{k \times n}} = \underbrace{(Dg)(f(x))}_{\in \mathbb{R}^{k\times m}} \cdot \underbrace{(Df)(x)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$

- Spezialfall $k=1$:
  $$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial t_i}(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f_1(t), \dots, f_m(t)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial t_i}(t)$$
  für alle $1 \le i \le n$.

  Auch: $D_i(g\circ f)(t) = (D_1 g(f(t)), \dots, D_m g(f(t))) \cdot (D_i f_j(t))_{1 \le j \le m}$,
  bildet man rechts das Matrixprodukt,
  so ist dies $= \sum_{j=1}^{m} D_j g(f(t)) \cdot D_i f_j(t)$.

- MWS: $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, f st. db., $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\{x + t\xi;\ t \in [0,1]\} \subseteq U$.
  Dann: $f(x+\xi) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x+t\xi)\,dt\right) \cdot \xi$. (Spezialfall $m=1$: wie "alte" MWS)