Lösungshinweise zum Blatt 1, Analysis 2:

Aufgabe 1: Entwicklung in Taylorreihen im Punkt a:

Taylorreihe: $\quad T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$

jeder Teil (1P)

a) $f(x) = \cos(3x)$ hat die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(3x)^{2k}}{(2k)!}$, alle $x \in \mathbb{R}$, in $a=0$.

[Setze $3x$ in Taylorentw. von $\cos(x)$ ein, wegen $\cos(0)=1$, $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$, $\cos''(0) = -\cos(0) = -1$, $\cos'''(0) = 0$ usw. ist diese $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k$, kgt. für alle $x \in \mathbb{R}$ (Quot. krit.)]

b) $f(x) = x^2 e^{-x}$ hat die Taylorreihe

$$x^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (-x)^k}_{\text{e-Reihe}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-2)!} \cdot x^k,$$

alle $x \in \mathbb{R}$, in $a=0$.

c) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ hat die Taylorreihe $1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$, $-1 < x < 1$, in $a=0$.

Denn: $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ für $-1 < x < 1$ (geom. Σ),

und $$(1-x^2) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2(k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

d) $f(x) = \frac{5x-1}{x^2-x-2}$ hat die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (3 - 2^{1-n})(x-1)^n$ in $a=1$.

"Partialbruchzerlegung"

Bew.: Es ist $\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1}$, sei $g(x) = (x-2)^{-1}$, $h(x) = (x+1)^{-1}$

Dann: $g^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (x-2)^{-n}$, $h^{(n)}(x) = (-1)^n n! \cdot (x+1)^{-n}$,

also $g^{(n)}(1) = (-1)^n n! (-1)^{-n} = n!$, $h^{(n)}(1) = (-1)^n n! \cdot 2^{-n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot n!$,

die Taylorreihe ist dann $3\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3 - 2^{1-n})(x-1)^n$. □

Aufgabe 2:

(a) GW-Berechnung mit Potenzreihenentwicklung (ohne del'Hôpital! der Aufwand damit wäre hier sehr groß!)

1P (i) Beh.: $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-6x}\right)=3$

Bew.: Haben $\sqrt{1+y}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}y^k=1+\frac{1}{2}y+R(y)$, $|R(y)|\le C\cdot y^2$ für ein $C>0$ und alle y, $-1<y<1$

also $x-\sqrt{x^2-6x}=x-\sqrt{x^2(1-\frac{6}{x})}=x-|x|\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{x}+R(\frac{-6}{x})\right)$,

für $x>0$ ist dies $=\underbrace{x-x}_{=0}+3+\underbrace{x\cdot R(\tfrac{-6}{x})}_{\xrightarrow{x\to\infty}0}\to 3$ für $x\to\infty$.

$\xrightarrow{x\to\infty}0$, da $xR(\frac{-6}{x})\le C\cdot\frac{36}{x}\xrightarrow{x\to\infty}0$ $\square$

1P (ii) Beh.: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=0$

Bew.: Haben $\sin x=x+R(x)$ mit $|R(x)|\le C\cdot x^3$ für ein $C>0$, alle $x\in\mathbb{R}$,

also $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+R(x)}=\frac{x+R(x)-x}{x(x+R(x))}=\frac{R(x)}{x^2+R(x)x}=\frac{\frac{R(x)}{x^2}}{1+\frac{R(x)}{x}}$

$\xrightarrow{x\to0}\frac{0}{1+0}=0$,

da $\left|\frac{R(x)}{x}\right|\le\left|\frac{R(x)}{x^2}\right|\le C\cdot x\xrightarrow{x\to0}0$. $\square$

2P b) Benutzung der Formel $\pi=4\cdot\left(4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}\right)$ * vgl. Anhang

zur Berechnung von π bis auf $|\text{Fehler}|\le 10^{-6}$:

Haben $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\dots$

[$\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k$, gliedweise integrieren: $\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$]

- $\arctan\frac{1}{5}\approx\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^7+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^9\approx 0{,}19739556$

Taschenrechner, TR-Fehler $<10^{-8}$

Abschneidefehler: $\le\frac{1}{11}\left(\frac{1}{5}\right)^{11}<2\cdot10^{-9}$

- $\arctan\frac{1}{239}\approx\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{239}\right)^3\approx 4{.}18407\cdot10^{-3}$ (TR-Fehler $<10^{-8}$), $\left(\frac{1}{239}\right)^5<1{,}3\cdot10^{-12}$ Abschneidefehler

- Somit: $\pi\approx4\cdot\left(4\cdot0{,}1973955-4{,}18407\cdot10^{-3}\right)\approx3{,}1415927$, (Fehler $\le10^{-7}$)

4P

Aufgabe 3

Vor.: Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall.

Weiter sei (das n-te Taylorpolynom von f in a)

$$f \in \mathcal{C}^{n+1}(D, \mathbb{R}),\quad a \in D,\quad T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

$$E_n(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n}, & x \in D \setminus \{a\}, \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Beh.: E_n ist diff'bar in a, $E_n'(a) = \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$.

Bew.: Es ist: $f(x) = T_n(x) + \underline{E_n(x) \cdot (x-a)^n}$ für $x \neq a$

laut Def. von $E_n(x)$.

Nach dem Taylor-Satz gilt

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x,a) \quad \text{für alle } x \in D$$

mit dem Lagrange-Restglied $R_n(x,a) = \underline{\dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}}$,

$\eta \in (a,x)$ geeignet.

Also: $E_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)$,

und $\dfrac{E_n(x) - \overbrace{E_n(a)}^{=0}}{x-a} = \dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \xrightarrow{x \to a} \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$,

da für $x \to a$ auch $\eta \to a$ folgt und $f^{(n+1)}$ stetig in a ist.

$\square$

Bem.: Haben für den Taylor-Satz hier die Vor. der Vorlesung benutzt.
Es genügt auch die schwächere Vor. "$f \in \mathcal{C}^n(\overline{D}, \mathbb{R})$, $f^{(n+1)}(a)$ ex."
für den Taylor-Satz, vgl. Heuser.

$\overline{D}$ = Abschluss von D, also kompaktes IV, aber $a \in D$ muß im Inneren von D sein

4P **Aufgabe 4** Sei D offenes, beschr. IV, $a \in D$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Def.: $f: D \to \mathbb{R}$ hat in a die Multiplizität n
$:\Longleftrightarrow$ f n-mal diff'bar in a, $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \neq f^{(n)}(a)$.

Vor.: $f: D \to \mathbb{R}$ habe die Multiplizität n, $f \in \mathcal{C}^n(D, \mathbb{R})$.

Beh.: • Ist n ungerade, ist a keine Extremalstelle von f.
• Ist n gerade, so ist a eine Maximalstelle, wenn $f^{(n)}(a) < 0$, und eine Minimalstelle, wenn $f^{(n)}(a) > 0$ ist.

Bem.: Nach Aufgabe 3 gilt auch: $f(x) = T_n(x) + E_n(x) \cdot (x-a)^n$,
hier: $f(x) = \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + E_n(x) \right)}_{=: g(x)} \cdot (x-a)^n$ mit $g(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0$

Hier hat f eine Nullstelle der "Vielfachheit n"

Bew.: Für $x \in D$ ist nach Taylor: $f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x-a)^n$, ξ zwischen a und x.

Ist D klein, so hat $f^{(n)}(t)$ für alle $t \in D$ dasselbe Vorzeichen wie $f^{(n)}(a)$.
Dann hat, sofern D klein, $f^{(n)}(\xi)$ für alle $x \in D$ stets dasselbe Vorzeichen wie $f^{(n)}(a)$. ⌈Wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ nahe a⌋

• Sei n ungerade. Für $x < a$ ist dann $(x-a)^n < 0$, also $f(x) < f(a)$,
für $x > a$ ist dann $(x-a)^n > 0$, also $f(x) > f(a)$.
Daher kann $f(a)$ kein Extremwert sein.

• Sei n gerade. Dann ist $(x-a)^n \geq 0$.
• Mit $f^{(n)}(a) < 0$, also $f^{(n)}(\xi) < 0$ folgt $f(x) < f(a)$ für $x \neq a$, dann liegt bei a ein Maximum vor.
• Mit $f^{(n)}(a) > 0$, also $f^{(n)}(\xi) > 0$ folgt $f(x) > f(a)$ für $x \neq a$, dann liegt bei a ein Minimum vor.

□

Anhang:

Beweis der $\frac{\pi}{4}$-Formel: $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$

Der arctan genügt den Additionstheoremen ($|xy|<1$)

- $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$

und

- $2\arctan x = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$, also
$$4\arctan x = 2\arctan\frac{2x}{1-x^2} = \arctan\frac{2\cdot\frac{2x}{1-x^2}}{1-\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \arctan\frac{4x(1-x^2)}{(1-x^2)^2-4x^2}$$

mit $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{1}{239}$

folgt: $$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan \underbrace{\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{24}{25}}{\left(\frac{24}{25}\right)^2-\frac{4}{25}}}_{=:z} - \arctan\frac{1}{239}$$

Haben $$z = \frac{4\cdot 24\cdot 5}{24^2-4\cdot 25} = \frac{480}{476} = \frac{120}{119},$$

und $$\arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan\underbrace{\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\cdot 239}}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{120\cdot 239 - 119}{119\cdot 239 + 120} = \frac{28.561}{28.561}.$$