Lösungshinweise zu Blatt 3, Analysis 2:

(Stoff: Kap. 4 [F], Def. Kurve, Rektifizierbarkeit, Kurvenlängenberechnung)

Aufgabe 9

(a) Berechnung der Ableitung $f'(a)$ und Tangentengleichung der Kurve in $f(a)$:

(i) $f: [0,2] \to \mathbb{R}^4$, $f(t) := (1, \sin t), t^2, t^3 - t)$ für $a = 1$:

Es ist $f'(t) = (0, \cos(t), 2t, 3t^2 - 1)$

und $f'(1) = (0, \cos(1), 2, 2)$,

und die Tangentenglg. in $f(1)$ ist $g(t) = f(1) + f'(1) \cdot t$,

also
$$g(t) = (1, \sin(1), 1, 0) + t \cdot (0, \cos(1), 2, 2)$$
$$= (1, \sin(1) + t\cos(1), 1 + 2t, 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Kurve im $\mathbb{R}^3$, die Schnittkurve von $x + y + z = 3$ und $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$ ist, in $f(a) = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$:

Mit $t := x$ und $y = 3 - t - z$

folgt $t^2 - (3 - t - z)^2 + 2z^2 = 2$
$$\Leftrightarrow t^2 - (3-z)^2 + 2(3-z)t - z^2 + 2z^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 9 + 6z \qquad + 6t - 2zt \qquad = 2$$
$$\Leftrightarrow z(6 - 2t) = 2 - t^2 + 9 - 6t \quad (= 11 - 6t - t^2)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{t^2 + 6t - 11}{2t - 6},$$

und
$$y = 3 - t - \frac{t^2 + 6t - 11}{2t - 6}$$

$$\rightsquigarrow f(t) := \left(t, 3 - t - \frac{t^2 + 6t - 11}{2t - 6}, \frac{t^2 + 6t - 11}{2t - 6}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitung von $g(t) := \frac{t^2+6t-11}{2t-6}$ ist $g'(t) = \frac{(2t+6)(2t-6)-(t^2+6t-11)\cdot 2}{(2t-6)^2}$,

also ist

$$g'(1) = \frac{8\cdot(-4)-(-4)\cdot 2}{4^2} = \frac{-8+2}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}, \quad g(1) = \frac{1+6-11}{2-6} = 1,$$

Damit ist $f'(1) = (1, -1+\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = (1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

und die Tangente ist, da $f(1) = (1,1,1)$: $h(t) = f(1) + t\cdot f'(1)$,

also $h(t) = (1,1,1) + t\cdot(1,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}) = (1+t, 1+\frac{t}{2}, 1-\frac{3}{2}t)$, $t\in\mathbb{R}$.

(e) Vor.: Sei $f: I \to \mathbb{R}^n$ diff'bar, $L(x) := \|f(x)\|$ für $x\in I$.

Beh.: $\forall x\in I, f(x)\neq 0$: $\langle f(x), f'(x)\rangle = L(x)\cdot L'(x)$.

Bew.: Es ist $L(x) = \|f(x)\| = \sqrt{f_1^2(x)+\ldots+f_n^2(x)}$,

wobei $f_1,\ldots,f_n$ die Komponenten von f sind.

Dann ist L diff'bar mit Ableitung

$$L'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f_1^2(x)+\ldots+f_n^2(x)}}\cdot\left(2f_1(x)f_1'(x)+\ldots+2f_n(x)f_n'(x)\right)$$

$$= \frac{1}{L(x)}\cdot\left(f_1(x)f_1'(x)+\ldots+f_n(x)f_n'(x)\right)$$

$$= \frac{1}{L(x)}\cdot\langle f(x), f'(x)\rangle, \text{ falls } L(x)\neq 0, \text{ d.h. } f(x)\neq 0.$$

Also gilt $\langle f(x), f'(x)\rangle = L(x)\cdot L'(x)$ für alle x mit $f(x)\neq 0$. $\square$

Bem.: Falls $f(x)=0$, gilt dies auch, dann ist

$$\langle \underbrace{f(x)}_{=0}, f'(x)\rangle = 0 = \underbrace{L(x)}_{=0}\cdot L'(x), \text{ sofern } L'(x) \text{ ex.}$$

Zusatz: Ist L konstant, so ist $L'(x)=0$,

also $\langle f(x), f'(x)\rangle = 0$ bzw. $f(x)\perp f'(x)$

für $x\in I$.

Aufgabe 10

(a) Beh.: Die Länge der Sinuskurve $\sin : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ ist $\approx 3{,}82$.

Bew.: Die Länge ist

$$= \int_0^\pi \|f'(t)\|\, dt = \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 t}\, dt$$

(von der Binomialreihe)

$$= \int_0^\pi \left(1 + \tfrac{1}{2}\cos^2 t - \tfrac{1}{2\cdot 4}\cos^4 t + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cos^6 t + \dots\right) dt$$

$$= \pi\left(1 + \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2^6} + \frac{5}{2^8} - \frac{175}{2^{14}} + \dots\right) \approx 3{,}82 \qquad \square$$

$$\gamma_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx \leadsto \underbrace{\gamma_n = \frac{n-1}{n}\cdot \gamma_{n-2}}_{\text{mit partieller Integration}},\ \gamma_0 = \frac{\pi}{2},\ (\gamma_1 = 1),\ \gamma_2 = \frac{\pi}{2^2},\ \gamma_4 = \frac{3\pi}{2^4},$$

$$\gamma_6 = \frac{3\pi}{2^4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5\pi}{2^5},\quad \gamma_8 = \frac{5\pi}{2^5}\cdot\frac{7}{8} \dots$$

(b) Beh.: Die Länge des Einheitskreises im $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ist $4\sqrt{2}$, und die bzgl. $\|\cdot\|_1$ ist 8.

Bew.:

Der Einheitskreis ist parametrisierbar durch

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, \quad \text{also ist } f'(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

Die Länge bzgl. $\|\cdot\|_1$ ist dann

$$\int_0^{2\pi} \left\|\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\right\|_1 dt = \int_0^{2\pi} (|-\sin t| + |\cos t|)\, dt = \int_0^{2\pi} |\sin t|\, dt + \int_0^{2\pi} |\cos t|\, dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin t + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t = 2\left([-\cos t]_0^{\pi} + [\sin t]_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)$$

$$= 2(1+1+1+1) = \underline{\underline{8}}.$$

Zur Berechnung der Länge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ betrachten wir den Integranden

$$\left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|-\sin t|, |\cos t|\}$$

und bestimmen die Schnittpunkte von $|\sin t|$ und $|\cos t|$ für $t \in [0, 2\pi]$, diese liegen bei $t_1 = \pi/4$, $t_2 = 3\pi/4$, $t_3 = 5\pi/4$, $t_4 = 7\pi/4$, es folgt für die Länge:

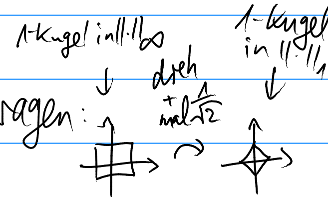
$$\int_0^{2\pi} \max\{|\sin t|, |\cos t|\}\, dt = \int_0^{\pi/4} \cos t\, dt + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin t\, dt + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} -\cos t\, dt$$

$$+ \int_{5\pi/4}^{7\pi/4} -\sin t\, dt + \int_{7\pi/4}^{2\pi} \cos t\, dt$$

$$= [\sin t]_0^{\pi/4} + [-\cos t]_{\pi/4}^{3\pi/4} + [-\sin t]_{3\pi/4}^{5\pi/4} + [\cos t]_{5\pi/4}^{7\pi/4} + [\sin t]_{7\pi/4}^{2\pi}$$

$$= 0 + 8 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 0 = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}.$$

<u>Bem.:</u> auch anschaulich muss die Länge bei $\|\cdot\|_1$ das $\sqrt{2}$-fache betragen:



<u>Aufgabe 11</u>

<u>Beh.:</u> Die differenzierbare Kurve $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ ist nicht rektifizierbar.

<u>Bew.:</u> Für $x \neq 0$ ist $g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cos\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{x^3}\right)$,

für $x = 0$ ist $g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} x \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{beschr.}} = 0$.

Der GW von $g'(x)$ für $x \to 0$ ex. aber nicht, d.h. g ist diff'bar, nicht aber stetig diff'bar. [Sonst wäre sie laut Satz [F] rekt'bar]

Wir zeigen nun, dass man g keine endl. Länge zuordnen kann:

Betr. die Zerlegung $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$

Tipp! → mit $x_\nu := \left(\frac{\pi}{2} + \pi\nu\right)^{-1/2} \in [-1, 1]$, $0 \leq \nu \leq n$.

Damit ist $\quad g(x_\nu) = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}+\pi\nu\right)^{-1}, & \text{falls } \nu \text{ gerade}, \\ -\left(\frac{\pi}{2}+\pi\nu\right)^{-1}, & \text{falls } \nu \text{ ungerade}. \end{cases}$

Es ist $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} |g(x_\nu)-g(x_{\nu-1})|$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi\nu\right)^{-1} + \left(\frac{\pi}{2}+\pi(\nu-1)\right)^{-1} \right)$$

$$\geq 2\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi\nu} \geq \frac{2}{\pi} \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu+1}}_{\text{harmonische Reihe}}, \text{ was für } n\to\infty \text{ divergiert.}$$

Damit kann die Kurve keine endliche Länge besitzen, sie ist also nicht rektifizierbar. $\square$

Aufgabe 12 (Peano-Kurve im Dreieck Δ)

Sei $\Delta := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$, Flächeninhalt: $A(\Delta)=\frac{1}{2}$.

(i) Def. der n-ten Zerlegung: Möchten $\Delta = \bigcup_{j=1}^{2^n} \Delta_j^n$,
die Δ_j^n gleichschenklig & rechtwinklig,
$A(\Delta_j^n) = 2^{-n-1}$, mit a) $\Delta_j^n = \Delta_{2j}^{n+1} \cup \Delta_{2j-1}^{n+1}$, $1\leq j\leq 2^n$,
b) Δ_j^n und Δ_{j+1}^n haben gemeinsame Seite, $1\leq j\leq 2^n-1$.

Def. nun rekursiv eine Zerlegung von Δ:

- Im 1-ten Schritt $n=1$ setze $\Delta_1^1 := \Delta\cap\{(x,y)\mid y\leq x\}$, $\Delta_2^1 := \Delta\cap\{(x,y)\mid y\geq x\}$ } gleichschenklig & rechtwinklig
 also $\Delta = \Delta_1^1 \cup \Delta_2^1$, $A(\Delta_j^1) = \frac{1}{4}$ für $j=1,2$.
 Die gemeinsame Seite von Δ_1^1 und Δ_2^1 ist $\Delta\cap\{(x,x)\}$.
- Sei im n-ten Schritt eine n-te Zerlegung konstruiert.
 Im $(n+1)$-ten Schritt definiere $\Delta_1^{n+1},\dots,\Delta_{2^{n+1}}^{n+1}$ folgendermaßen:
 Man halbiere das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck Δ_1^n in zwei gleichschenklige rechtwinklige Δ_2^{n+1} und Δ_1^{n+1} mit gemeinsamer Seite.

Ebenso Δ_2^n in $\Delta_3^{n+1}, \Delta_2^{n+1}$, dann Δ_3^n in $\Delta_4^{n+1}, \Delta_3^{n+1}$ usw.
Dadurch erfüllen auch die Δ_j^{n+1} die Bedingungen a) & b),
und es ist $A(\Delta_j^{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot 2^{-n-1} = 2^{-n-2}$. ✓

ii) Sei $I_j^n := \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]$ für $j = 1, \dots, 2^n$, $I := [0,1]$.

Also ist $I = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_j^n$, $I_j^n = I_{2j}^{n+1} \cup I_{2j-1}^{n+1}$. ⊗

Def. nun $f: I \to \mathbb{R}^2$ durch $f(t) := (x,y)$ mit $\{(x,y)\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n$
für $\{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{k_n}^n$, d.h. $t \in I$ def. eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen,
durch die ein Punkt $(x,y) \in \Delta$ durch $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n$ def. wird.
Denn die Δ_j^n sind abgeschl., und wegen ⊗ gilt $k_{n+1} \in \{2k_n, 2k_n - 1\}$,
so dass $\Delta_{k_{n+1}}^{n+1} \subseteq \Delta_{k_n}^n$ folgt, also ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n \neq \emptyset$.

Wegen dem Schachtelungsprinzip der Vorlesung
ex. dann genau ein Punkt (x,y) in $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n$, dieser ist also
eindeutig definiert und f somit wohldefiniert.

Beh.: Es gilt $f(I) = \Delta$

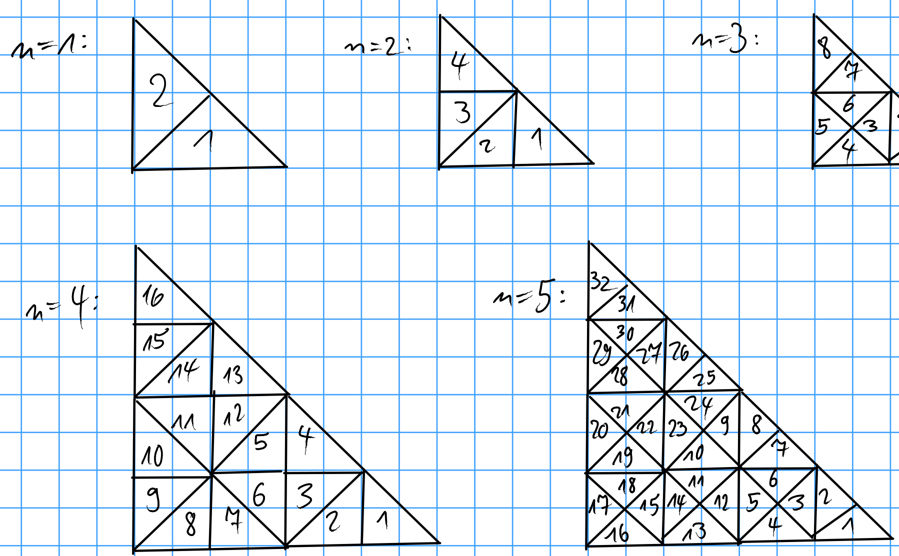
Bew.: Sei $(x,y) \in \Delta$ beliebig. Def. dazu eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ durch

$$k_1 := \begin{cases} 1, & \text{falls } (x,y) \in \Delta_1^1 \\ 2, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad k_{n+1} := \begin{cases} 2k_n - 1, & \text{falls } (x,y) \in \Delta_{2k_n-1}^{n+1}, \\ 2k_n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

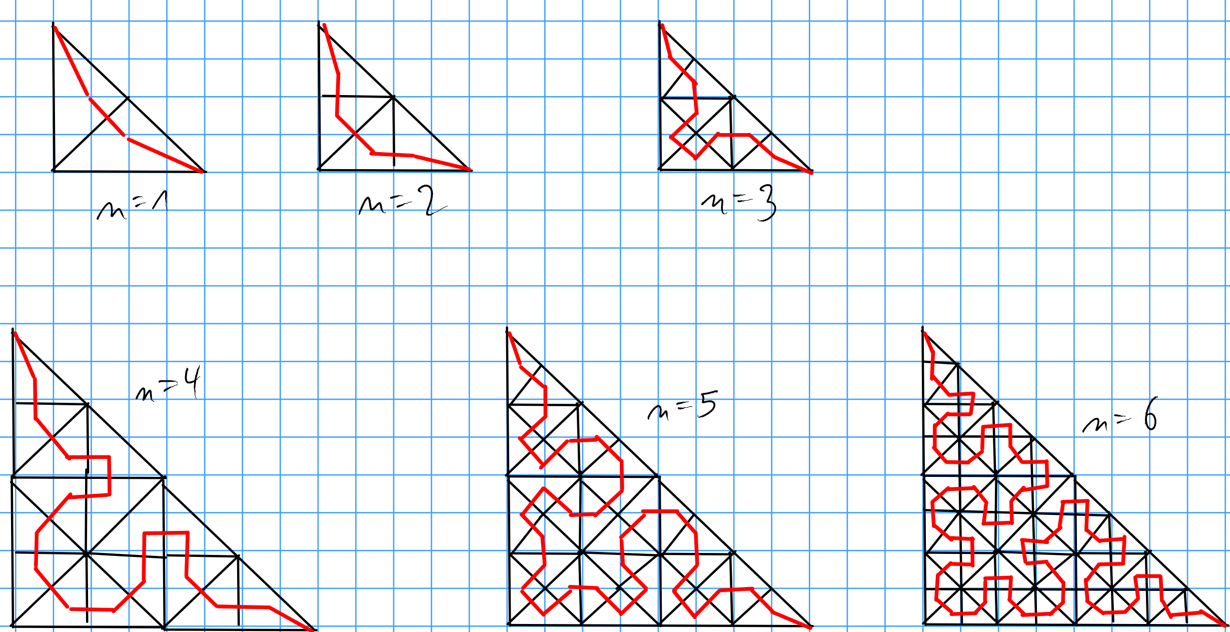
Für die so def. Folge gilt $k_{n+1} \in \{2k_n, 2k_n - 1\}$, also ist
$I_{k_{n+1}}^{n+1} \subseteq I_{k_n}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt ein $t \in I$ mit $\{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{k_n}^n$,
d.h. es ist also $f(t) = (x,y)$. Da $(x,y) \in \Delta$ bel. war, folgt $f(I) = \Delta$. $\square$

Bem.: Die Abb. f ist also surjektiv, muss aber nicht injektiv sein, da auch
andere Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der geforderten Art definierbar sind, die zu einem
anderen Urbild t führen können.

Skizze der Δ-Zerlegung und zeichnerische Approximation von f durch rektifizierbare Kurven:



usw.



usw.