Lösungshinweise zum Blatt 4, Analysis 2:

Stichworte: partielle Abl., Richtungsabl., Stetigkeit bei Funktionen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Gradient, Satz von Schwarz

Aufgabe 13

(a) $f(x,y) := \frac{x-y}{x+y}$, Def.bereich: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

dann ist $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$

und $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1$,

somit kann $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht ex.,

also ist f nicht stetig in $(0,0)$.

(b) Geg.: $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2y - 3xy^2 + z$.

Die partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung sind:

1. Ordnung: $D_1 f(x,y,z) = 2xy - 3y^2$, $D_2 f(x,y,z) = x^2 - 6xy$,
$D_3 f(x,y,z) = 1$

2. Ordnung: $D_1^2 f(x,y,z) = 2y$, $D_2^2 f(x,y,z) = -6x$, $D_3^2 f(x,y,z) = 0$
$D_1 D_2 f(x,y,z) = D_2 D_1 f(x,y,z) = 2x - 6y$,
$D_1 D_3 f(x,y,z) = D_3 D_1 f(x,y,z) = 0$,
$D_2 D_3 f(x,y,z) = D_3 D_2 f(x,y,z) = 0$.

Gradient: $(D_1 f(x,y,z), D_2 f(x,y,z), D_3 f(x,y,z)) = (2xy - 3y^2, x^2 - 6xy, 1)$.

Richtungsabl. von f im Punkt $a := (0,0,0)$ in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$:

$D_v f(a) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a))$, falls ex.

Hier: $\frac{1}{t}\left(f(a+tv)-f(a)\right) = \frac{1}{t}\cdot f(tv) = \frac{1}{t}\left(\frac{t^3}{3\sqrt{3}} - 3\frac{t^3}{3\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}}\right) \xrightarrow[t\to 0]{} \underline{\underline{\frac{-1}{\sqrt{3}}}}$

In bel. Richtung $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ mit $\|v\|=1$, in $a=(0,0,0)$:

$\frac{1}{t}\cdot f(tv) = \frac{1}{t}\left(t^3 v_1^2 v_2 - 3t^3 v_1 v_2^2 + t v_3\right) \xrightarrow{t\to 0} \underline{\underline{v_3}}$.

Die Einheitsvektoren $v=(0,0,1)$ und $v=(0,0,-1)$ haben max. $|v_3|$, dort ist die Richtungsabl. also betraglich am größten.

Aufgabe 16

Vor.: $f: \mathbb{R}^2$ stetig diff'bar, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
$u, v \in \mathbb{R}$, $g(t) := f(a+ut, b+vt)$.

Beh.: g ist diff'bar in 0, $g'(0) = u\, D_1 f(a,b) + v\, D_2 f(a,b)$.

Bew.:
Es gilt $g(t)-g(0)$

$= f(a+ut, b+vt) - f(a,b) = \underline{f(a+ut, b)} - f(a,b)$
$+ f(a+ut, b+vt) - \underline{f(a+ut, b)}$

Tipp!

Nach dem MWS Tipp!
ex. $\xi \in\,]0, ut[$, $\eta \in\,]0, vt[$, so dass dies
$= ut\, D_1 f(a+\xi, b) + vt\, D_2 f(a+ut, b+\eta)$ ist.

Also ist $\frac{1}{t}\left(g(t)-g(0)\right) = u\, D_1 f(a+\xi, b) + v\, D_2 f(a+ut, b+\eta)$.

Mit $t\to 0$ gehen auch $\xi = \xi(t)$ und $\eta = \eta(t)$ gegen 0, da f stetig diff'bar (und damit auch partiell stetig diff'bar), strebt dann der letzte Ausdruck gegen
$u\, D_1 f(a,b) + v\, D_2 f(a,b)$.

$\square$

Aufgabe 15

Vor.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y=0, \\ \dfrac{(x^2y+xy^2)\sin(x-y)}{x^2+y^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$

Beh.: Die partiellen Abl. ex. bis zur 2. Ordnung
(d.h. $D_1D_2 f$, $D_2 D_1 f$, $D_1^2 f$, $D_2^2 f$),
aber $(D_2 D_1 f)(0,0) \neq (D_1 D_2 f)(0,0)$.

Bew.: Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

(1) $$D_1 f(x,y) = \frac{(2xy+y^2)\sin(x-y) + (x^2y+xy^2)\cos(x-y)}{x^2+y^2} - \frac{2x(x^2y+xy^2)\sin(x-y)}{(x^2+y^2)^2},$$

(2) $$D_2 f(x,y) = \frac{(x^2+2xy)\sin(x-y) - (x^2y+xy^2)\cos(x-y)}{x^2+y^2} - \frac{2y(x^2y+xy^2)\sin(x-y)}{(x^2+y^2)^2},$$

und die Differentiationsregeln (Quotientenregel, Kettenregel usw.) zeigen, dass auch die zweiten partiellen Abl. für $(x,y) \neq (0,0)$ existieren.

Diese Formeln sind aber nicht für $(0,0)$ anwendbar, daher:

$$D_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\big(f(x,0) - f(0,0)\big) = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\big(f(0,y) - f(0,0)\big) = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Einsetzen von $y=0$ in (1) und (2) gibt:

$$D_1 f(x,0) = 0, \quad D_2 f(x,0) = \sin x, \quad x \neq 0,$$

also

$$D_1^2 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\big(D_1 f(x,0) - D_1 f(0,0)\big) = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,$$

$$D_1 D_2 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\big(D_2 f(x,0) - D_2 f(0,0)\big) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 0}{x} = \underline{\underline{1}}.$$

Einsetzen von $x=0$ in (1) und (2) gibt:

$$D_1 f(0,y) = -\sin y, \quad D_2 f(0,y) = 0, \; y \neq 0,$$

also

$$D_2 D_1 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}(D_1 f(0,y) - D_1 f(0,0)) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}(-\sin y - 0) = \underline{\underline{-1}},$$

$$D_2^2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}(D_2 f(0,y) - D_2 f(0,0)) = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Somit ist $D_1 D_2 f(0,0) = 1 \neq -1 = D_2 D_1 f(0,0)$.

Grund: f ist nicht (2x) stetig partiell diff'bar in $(0,0)$, sonst würde der Satz von Schwarz greifen.

<u>Satz von Schwarz:</u> Sei $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, f zweimal stetig partiell diff'bar.
Dann ist $D_i D_j f(a) = D_j D_i f(a)$ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ und allen $a \in U$.

<u>Aufgabe 14</u>

<u>Vor.:</u> $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

<u>Beh.:</u> g ist in $(0,0)$ unstetig, dort aber in allen Richtungen diff'bar.

<u>Bew.:</u> Haben: g in a stetig $\Leftrightarrow \forall (x_k) \subseteq \mathbb{R}^2: \lim_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(a)$.

1. Beh.: g ist in $a = (0,0)$ unstetig.

Bew.: Für $x_k := (k^{-2}, k^{-1})$ gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty}(k^{-2}, k^{-1}) = (0,0)$, Sowie $g(x_k) = g(k^{-2}, k^{-1}) = \frac{k^{-2} \cdot k^{-2}}{k^{-4}+k^{-4}} = \frac{1}{2}$, d.h. $\lim_{k\to\infty} g(x_k) = \frac{1}{2}$.

Es ist aber $g(0,0) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{k\to\infty} g(x_k)$, also ist g in $(0,0)$ unstetig.

2. Beh.: g ist in $(0,0)$ in allen Richtungen diff'bar,
d.h. $\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\ \exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(tv) - g(0,0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} g(tv)$.

Bew.: Sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Fall: $v_1 = 0$

Dann: $0 = g(tv) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \overbrace{g(tv)}^{=0}$, d.h. der lim ex.

2. Fall: $v_1 \neq 0$.

Dann:
$$\frac{v_2^2}{v_1} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t v_1 \cdot t^2 \cdot v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f\begin{pmatrix} t v_1 \\ t v_2 \end{pmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(tv),$$ d.h. der lim ex.

$\square$

Bem. zu Aufgabe 13 c):

Ist durch $f(x,y,z) = \text{const.}$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ geg.,
ist $\operatorname{grad} f(a)$ der Normalenvektor der Tangentialebene in a.

(i) Fläche: $\underbrace{-z + x^2 + y^2}_{f(x,y,z) :=} = 1$, $a = (1,2,4)$: $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, -1)$

Tangentialebene in $(1,2,4)$ ist dann beschr. durch $\langle (x,y,z) - a, \operatorname{grad} f(a) \rangle = 0$,
hier also $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 2 + 4y - 8 - z + 4 = 0$
$\iff \underline{z = 2x + 4y - 6}$

(ii) Fläche: $x^2 - 2y^2 + 3xy - z = 0$, $a = (2,-1,-4)$,
also $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x + 3y, -4y + 3x, -1)$, $\operatorname{grad} f(a) = (1, 10, -1)$
hier: $\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - 2 + 10y + 10 - z - 4 = 0 \iff z = \underline{x + 10y + 4}$