Lösungshinweise zu Blatt 5, Analysis 2:

Stichworte: Totale Differenzierbarkeit, Stetigkeit, Abb. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Kettenregel
+ Differential, Zush. mit partiellen Abl.

Definitionen:

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diff'bar in $a \in \mathbb{R}^n :\Leftrightarrow \exists A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$:
$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \; f(x) = f(a) + A(x-a) + \varphi(\|x-a\|),$$
wobei $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\|x-a\|} = 0$.

  Dann: $f'(a) := A$

  (A ist eindeutig; die Matrixdarst. von A bzgl. der Std.-basis ist $(D_j f_i(a))_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ (m Zeilen, n Spalten))

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig in $a \in \mathbb{R}^n$: $\forall (x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Kettenregel:

$f: U \to f(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$; $g: V \to \mathbb{R}^k$, $f(U) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^m$, f, g diff'bar in x bzw. $f(x)$

Dann: $D(g \circ f)(x) = (Dg)(f(x)) \cdot Df(x)$

Spezialfall: $k = 1 \leadsto \frac{\partial (g \circ f)}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_n) = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f_1(t), \dots, f_m(t)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_n)$

Aufgabe 17

a) Ableitungen der Funktionen: an einer Stelle im Definitionsbereich, geben die Matrixdarstellungen der Ableitung (= lin. Abb.) an:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x, x^2, x^4)^T \quad \leadsto f'(x) = (1, 2x, 4x^3)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$,

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = 4x^2yz^3 \leadsto g'(x,y,z) = (8xyz^3, \; 4x^2z^3, \; 12x^2z^2) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$,

$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $h(x,y) = (x, y, xy^2)^T \leadsto h'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$n: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $n(x,y,z) = (x+y, \; zy^2 - xy, \; z^2 - x, \; zyx^2)^T$

$$\leadsto n'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -y & 2zy - x & y^2 \\ -1 & 0 & 2z \\ 2yzx & zx^2 & yx^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

Forts. Aufg. 17:

$v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = (x^2y - y, x^3 - 3x^2y^2)^T \rightsquigarrow v'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & x^2-1 \\ 3x^2-6xy^2 & -6x^2y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$w: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $w(x,y,z) = ((x+y+z)e^x, (x^2+y^2)e^{-x})^T$

$$\rightsquigarrow w'(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x(x+1+y+z) & e^x & e^x \\ 2xe^{-x} - (x^2+y^2)e^{-x} & 2ye^{-x} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

b) Berechnung der Ableitung $f'(t_0)$ von $f(x,y) = e^{xy^2}$, $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t\sin t$, bei $t_0 = \frac{\pi}{2}$:

1. Weg: einsetzen und direkt ausrechnen ... (dies kann leicht aufwendig werden)

2. Weg: Mit Kettenregel (vgl. obiger Spezialfall, hier ist auch $n=1$):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = (y^2 e^{xy^2})(-t\sin t + \cos t) + (2xy\, e^{xy^2})(t\cos t + \sin t).$$

Für $t_0 = \frac{\pi}{2}$ ist $x(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$,

also $f'(t_0) = (\frac{\pi^2}{4}\cdot e^0)\cdot(-\frac{\pi}{2}) + 0 = \underline{\underline{-\frac{\pi^3}{8}}}.$

c) Berechnung der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial r}$ und $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ für $f(x,y) = x^3 - xy + y^3$, falls $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$:

Wieder mit der Kettenregel im Spezialfall (hier ist $n=2$):

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = (3x^2-y)\cdot\cos\varphi + (-x+3y^2)\cdot\sin\varphi,$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -(3x^2-y)\cdot r\sin\varphi + (-x+3y^2)\, r\cos\varphi.$$

Aufgabe 18

<u>Beh.:</u> Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & x=y=0, \\ (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{sonst}, \end{cases}$

ist a) in $(0,0)$ diff'bar,
und b) die partiellen Ableitungen sind in $(0,0)$ unstetig.

<u>Bew.:</u> Zu a): Für $(0,0) \neq u := (x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|u\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
[für $\mathbb{R}^n$ nehmen wir die 2-Norm, für die Begriffe „diff'bar"/„stetig" ist die Wahl der Norm im Prinzip egal wg. Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^n$.]

Dann ist

$$f(u) = f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \|u\|_2^2 \sin\left(\|u\|_2^{-1}\right),$$

also $\lim\limits_{u\to 0} \frac{f(u)}{\|u\|_2} = \lim\limits_{\|u\|_2 \to 0} \|u\|_2 \underbrace{\sin\left(\|u\|_2^{-1}\right)}_{\text{beschr.}} = 0$

und somit gilt $f(u) = 0 + 0 \cdot (u-(0,0)) + \varphi(u)$
mit $\varphi(u)$ so, dass $\frac{\varphi(u)}{\|u-(0,0)\|_2} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.
Also ist f diff'bar in $(0,0)$, und es gilt $f'(0,0) = 0$. $\square$

Zu b): Die partiellen Ableitungen ex. in $(0,0)$, da f dort diff'bar ist.
Ihre Berechnung:

$$D_1 f(x,y) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)\cdot 2x$$

$$= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

wegen der Symmetrie in x und y ist dann auch

$$D_2 f(x,y) = 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Forts. Aufg. 18:

Betr. nun die Folge $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = (0,0)$, nämlich $a_n := (\frac{1}{n}, 0)$.
Dann gilt: $D_1 f(a_n) = \frac{2}{n} \cdot \sin(n) - \frac{1}{n} \cdot \cos(n) \cdot n = \frac{2}{n} \sin(n) - \cos(n)$,
was für $n\to\infty$ nicht konvergiert, d.h. $D_1 f$ ist unstetig in $(0,0)$.

Entsprechend betr. $(b_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $b_n := (0, \frac{1}{n})$, analog: $\lim_{n\to\infty} b_n = (0,0)$,
aber $D_2 f(b_n)$ divergent, d.h. $D_2 f$ ist unstetig in $(0,0)$.

$\square$

Aufgabe 19

Vor.: $f: S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} \to \mathbb{R}$ stetig, $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei def. durch

$$F(x) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \cdot \|x\|_2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beh.: F in 0 diff'bar $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}: f(x) = Ax$, d.h. f ist linear.

Bew.: „$\Rightarrow$": Ist F diff'bar in 0 $(= (0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n)$,
so ist $F(x) = \overbrace{F(0)}^{=0} + A\cdot(x-0) + \varphi(\|x\|)$,
wo $A = F'(0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(\|x\|)}{\|x\|} = 0$ gilt.
Dann ist $F(x) - Ax = \varphi(\|x\|)$, also $f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - A\frac{x}{\|x\|} = \frac{\varphi(\|x\|)}{\|x\|} \; (\xrightarrow{x\to 0} 0)$.
Dies zeigt, dass für festes $x \in S^{n-1}$ gilt:

$$\lim_{\substack{t \downarrow 0 \\ (\text{d.h. } t>0)}} \left(f\left(\frac{tx}{\|tx\|}\right) - A \cdot \frac{tx}{\|tx\|} \right) = 0,$$ weil f stetig ist,

ist dies $= f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - A\cdot \frac{x}{\|x\|} = 0$,

also ist $f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = A \cdot \frac{x}{\|x\|}$ eine lineare Abb. auf S^{n-1}.

„$\Leftarrow$": Sei f linear, also $f(x) = Ax$. Dann ist
$F(x) = A \cdot \frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|$, also $F(x) = Ax$ $\quad (= F(0) + Ax + 0)$.
Somit ist F diff'bar in 0 mit $F'(0) = A$.

$\square$

Aufgabe 20

Vor.: $I := [0,1[$.

Für $a, b \in \mathbb{C}$ sei

$s(a,b) := \{a + t(b-a) \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{C}$ die Strecke von a nach b

und

$$T(S(a,b)) := s\left(a, a+\frac{b-a}{3}\right) \cup s\left(a+\frac{b-a}{3}, a+\frac{b-a}{3}+\left(\frac{b-a}{3}\right)\cdot e^{i\pi/3}\right)$$
$$\cup\, s\left(a+\frac{b-a}{3}+\left(\frac{b-a}{3}\right)\cdot e^{i\pi/3}, a+\tfrac{2}{3}(b-a)\right) \cup s\left(a+\tfrac{2}{3}(b-a), b\right).$$

Für eine endl. Menge $\{s_1, \ldots, s_K\}$, $K \in \mathbb{N}$, p.w. disjunkter Strecken sei
$T\left(\dot\bigcup_{k \le K} s_k\right) := \dot\bigcup_{k \le K} T(s_k)$, $T^0_{(I)} := I$, und sei $T^{n+1}_{(I)} := T\left(T^n_{(I)}\right)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

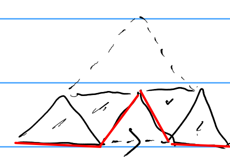
Beh.: Die Menge $T^n_{(I)}$ ist Bild einer injektiven (d.h. schneidet sich nicht selbst) Kurve $f_n : I \to T^n_{(I)} \subseteq \mathbb{C}$, so daß die f_n punktweise gegen eine nicht rektifizierbare Kurve $f : I \to \mathbb{C}$ konvergieren.

Bew.: 0. Beh.: Die $T^n(I)$ sind jeweils eine Vereinigung von gleichlangen Strecken. Dies folgt direkt aus der induktiven Definition.

Die $f_n : I \to T^n(I)$ werden wie folgt definiert:
Ist $T^n(I) = \dot\bigcup_{m=1}^{k} s_m$,
so ist $f_n(t) := s_m(t)$, falls $t \in [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$, $0 \le m \le k-1$.

[Ist s_m eine Strecke mit Endpunkten a und b, so sei $s_m(t) := a + tb \in \mathbb{C}$].

1. Beh.: die f_n schneiden sich nicht selbst.



← Grund-seite s

Anschaulich: Wird die Operation T auf eine Strecke s angewendet, bleibt der neue Streckenzug innerhalb des (linksseitig) auf s errichteten gleichseitigen Dreiecks. ⇝ "offenes Hülldreieck"
Nach einer Operation T sind die Hülldreiecke auf den vier neuen Strecken p.w. disjunkt und im alten Hülldreieck enthalten. Ein neuer Streckenzug kann daher nicht mit einem alten in Berührung kommen.

Forts. Aufg. 20:

2. Beh.: Die f_n konvergieren punktweise gegen ein $f: I \to \mathbb{C}$.
Ganz ähnlich wie Aufgabe 12 (Peano-Kurve) kann nun eine Funktionvorschrift der Kurve f über das Schachtelungsprinzip (mit den Hülldreiecken) erklärt werden.
Damit kann dann auch die (ε-δ-)Stetigkeit von f gezeigt werden (in jedem ε-Ball um ein $f(t_0)$ liegen die Funktionswerte $f(t)$ eines δ-Intervalls um t_0 ...).

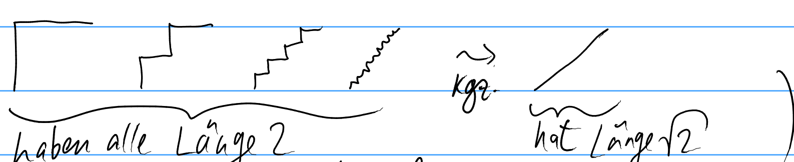
3. Beh.: f ist nicht rektifizierbar

Bew.: z.z.: $\forall L>0\ \forall \delta>0\ \exists$ Unterteil. mit Feinh. $<\delta$: $\overbrace{p_f(t)}^{\text{Streckenzuglänge}} \geq L$

Dazu sei $L>0$, $\delta>0$. Dann wähle m mit $4^{-m}<\delta$ und $\left(\frac{4}{3}\right)^m > L$, sowie die äquidistante Unterteilung $0=t_0<t_1<\ldots<t_{4^m}=1$,
d.h. $t_k = \frac{k}{4^m}$, $0 \leq k \leq 4^m$. Diese hat Feinheit $<\delta$.
Dann sind die $f(t_k)$ gerade die Endpunkte der Strecken im Streckenzug von $T^{4^m}(I)$, diese Punkte liegen also auf f.
Der Streckenzug hat nun die Länge $\left(\frac{4}{3}\right)^m > L$. □

1. Bem.: Vorsicht beim Argumentieren! Wir zeigen hier, dass es <u>auf der Kurve</u> stets einen Streckenzug beliebig kleiner Feinheit gibt, der länger als jede Schranke ist.

2. Bem.: Denk-Falle: konvergiert eine Streckenzugfolge punktweise gegen eine Grenzkurve f, und ist L der Grenzwert der Längenfolge der Streckenzüge, braucht L nicht die Länge von f zu sein.
Bsp. Streckenzugfolge:



(Was geht hier beim "Beweis", dass die Länge der Grenzdiagonale 2 wäre, schief?)

3. Bem.: Die hier konstruierte fraktale Kurve f heißt Koch-Kurve.
Setzt man 3 Kochkurven zu einer geschlossenen Kurve zusammen, heißt diese (Kochsche) Schneeflockenkurve.