Lösungshinweise zu Blatt 6, Analysis 2

Stichworte: Ableitungskonstrukte grad, div, rot, ∇, Δ / Differenzierbarkeit / Potential / Taylorformel / Kettenregel / der MWS zeigt: $\forall x \in U: f'(x) = 0 \Rightarrow f$ konstant auf U

Aufgabe 21

(a) Vor.: $w \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \langle x, w \rangle$.

Beh.: $\operatorname{grad} f = w$, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}^n: \operatorname{grad} f(x) = w$.

Bew.: Für $w = (w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

gilt $f(x) = \langle x, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i w_i$,

also $\operatorname{grad} f(x) = (w_1, w_2, \dots, w_n) = w$. $\square$

(b) Vor.: Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $r = r(x) := \|x\|_2$, sei $r \neq 0$.

Beh.: $\operatorname{div}\left(r \operatorname{grad} \frac{1}{r^3}\right) = \frac{12 - 3n}{r^4}$.

Bew.: [F], Bsp. (5.5): $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \cdot \frac{x}{r}$,

hier: $f(r) = \frac{1}{r^3}$, damit ist $\operatorname{grad} \frac{1}{r^3} = -3 r^{-4} \cdot \frac{x}{r} = -3 \frac{x}{r^5}$.

Somit: $\operatorname{div}\left(r \operatorname{grad} \frac{1}{r^3}\right) = \operatorname{div}\left(-3 \frac{x}{r^4}\right) = \operatorname{div}\left(-3\frac{x_1}{r^4}, -3\frac{x_2}{r^4}, \dots, -3\frac{x_n}{r^4}\right)$

$$= -3 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r^4} + x_i \cdot (-4) r^{-5} \cdot \frac{1}{2r} \cdot 2x_i \right) \qquad \left[r = \sqrt{\textstyle\sum x_i^2}\right]$$

$$= -3 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r^4} - 4 \frac{x_i^2}{r^6} \right) = -3 \frac{n}{r^4} + 12 \cdot \frac{1}{r^4} = \frac{12 - 3n}{r^4}. \quad \square$$

(c) Vor.: $b \in \mathbb{R}^3$, $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) := \frac{1}{2} b \times x$ ("$\times$" ist das 3-dim. Vektorprodukt).

Beh.: $\operatorname{rot} v = b$, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}^3: \operatorname{rot} v(x) = b$.

Bew.: Es gilt für die erste Komponente von $\operatorname{rot} v(x)$:

$$\left(\operatorname{rot} v(x)\right)_1 = \left(\operatorname{rot}\left(\tfrac{1}{2} b \times x\right)\right)_1 = D_2 \left(\tfrac{1}{2} b \times x\right)_3 - D_3 \left(\tfrac{1}{2} b \times x\right)_2$$

$$= D_2 \left(\tfrac{1}{2} b_1 x_2 - \tfrac{1}{2} b_2 x_1 \right) - D_3 \left(\tfrac{1}{2} b_3 x_1 - \tfrac{1}{2} b_1 x_3 \right)$$

$$= \tfrac{1}{2} b_1 + \tfrac{1}{2} b_1 = b_1,$$

ebenso läßt sich dies für die anderen beiden Komponenten berechnen.

[Beachte: $u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)^T$.]

(Anschaulich: $\frac{1}{2} b \times x$ ist Geschwindigkeitsfeld eines homogenen Wirbels der Stärke $\frac{1}{2}\|b\|$.)

(d) Vor.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \exp(x \sin y)$.

Beh.: Das zweite Taylorpolynom in $a = (0,0)$ ist $1 + xy$.

Bew.:

<u>Taylorformel:</u> $U \subset \mathbb{R}^n$, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\{x + t\xi;\, t \in [0,1]\} \subseteq U$, $f: U \to \mathbb{R}$ sei $(k+1)$-mal stetig diff'bar.

Dann ex. $\theta \in [0,1]$:

das ist die Formel in [F], würde lieber a statt x schreiben, und x statt ξ...

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha .$$

[Abkürzungen: $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $D^\alpha f(x) := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f(x)$, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$.]

Hier: $n = 2$ und $k = 2$, $x = a = (0,0)$,

und die α, die im zweiten Taylorpolynome vorkommen, sind:

$\alpha = (0,0)$ für $k = 0$, $\alpha = (1,0)$ und $(0,1)$ für $k = 1$,

$\alpha = (2,0)$, $(1,1)$ und $(0,2)$ für $k = 2$.

Die Formel lautet dann:
$$f(x+\xi) = f(x) + D_1 f(x) \cdot \xi_1 + D_2 f(x) \cdot \xi_2 + \tfrac{1}{2} D_1^2 f(x) \cdot \xi_1^2 + D_1 D_2 f(x) \cdot \xi_1 \xi_2 + \tfrac{1}{2} D_2^2 f(x) \cdot \xi_2^2 + \text{Rest}$$

Es ist $f(0,0) = 1$, weiter:

$D_1 f(x,y) = \sin y \cdot \exp(x \sin y)$, $D_2 f(x,y) = x \cos y \exp(x \sin y)$,

$D_1^2 f(x,y) = \sin^2 y \cdot \exp(x \sin y)$, $D_2^2 f(x,y) = -x \sin y \cdot \exp(x \sin y) + x^2 \cos^2 y \cdot \exp(x \sin y)$,

$D_1 D_2 f(x,y) = \cos y \cdot \exp(x \sin y) + x \cos y \cdot \sin y \cdot \exp(x \sin y)$.

Also: $D_1 f(0,0) = 0$, $D_2 f(0,0) = 0$, $D_1^2 f(0,0) = 0$, $D_2^2 f(0,0) = 0$,

$D_1 D_2 f(0,0) = 1$,

die Taylorformel lautet dann: $f(\xi) = \underbrace{1 + \xi_1 \xi_2}_{\text{Taylorpolynom der 2. Ordnung, das } f(\xi) \text{ approximiert.}} + \text{Rest}$

Schreiben auch $1 + xy$ dafür (als Approx. von $f(x,y)$.) $\square$

Aufgabe 24

(a) Vor.: $U \subset \mathbb{R}^n$ Konvex, d.h. $\forall x, y \in U: \{x + t(y-x);\ t \in [0,1]\} \subseteq U$,
$f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar, $\forall x \in U: f'(x) = 0$.

Beh.: $\exists w \in \mathbb{R}\ \forall x \in U: f(x) = w$, d.h. f ist konstant auf U.

Haben den MWS im Fall von Funktionen $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$:
Ist $\{a + t(b-a);\ t \in [0,1]\} \subseteq U$, f diff'bar, so ex. ein $t_0 \in [0,1]$:
$$f(b) - f(a) = f'(a + t_0(b-a)) \cdot (b-a) = \langle \operatorname{grad} f(a + t_0(b-a)),\ b-a \rangle.$$
$\rightsquigarrow$ Corollar zum MWS in [F]: Ist $M := \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x + t\xi)\|$, so ist
$\|f(x+\xi) - f(x)\| \leq M \cdot \|\xi\|$, also: $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup\limits_{t \in [0,1]} \|Df(a + t(b-a))\| \cdot \|b-a\|$.

Bew.:
Es sei nun $x \in U$ und sei $w := f(x)$. Weiter sei $b \neq x \in X$.
Dann ist $\{x + t(b-x);\ t \in [0,1]\} \subseteq U$.
Nach dem Corollar zum MWS gilt also
$$|f(b) - f(x)| \leq \sup_{t \in [0,1]} \underbrace{\|f'(x + t(b-x))\|}_{=0 \text{ nach Vor.}} \cdot \|b - x\| = 0,$$
also ist $f(b) = f(x) = w$. $\square$

(b) Die Beh. in (a) läßt sich direkt verallgemeinern auf offene Teilmengen U von $\mathbb{R}^n$, die polygonzusammenhängend sind, d.h. je zwei Punkte x und y in U sind durch einen endlichen Streckenzug miteinander verbunden, der ganz in U liegt.
Es gilt (ohne Beweis): U polygonzusammenhängend $\Leftrightarrow$ U wegzusammenhängend (U offen)
$\Leftrightarrow$ U zusammenhängend.

Zusammenhängende, offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ heißen Gebiete.

U wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow \forall x, y \in U, x \neq y: \exists s: [0,1] \to U$ stetig mit
$s(0) = x$, $s(1) = y$.

U zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ U nicht nicht zusammenhängend

U nicht zusammenhängend $:\Leftrightarrow \exists\, O_1, O_2 \subset U$, $O_1 \neq \emptyset \neq O_2$: $U = O_1 \cup O_2$,
$O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Aufgabe 24

(c) **Vor.:** $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$, $f: X \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Beh.: $f(X) = \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$.

Bew.: X ist die Vereinigung der 4 offenen Quadranten $X_1, \ldots, X_4$ in $\mathbb{R}^2$,

nämlich $X_1 = \mathbb{R}^2_{>0}$, $X_2 = \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}_{>0}$, $X_3 = \mathbb{R}^2_{<0}$, $X_4 = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{<0}$.

$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$ Diese sind alle konvex (klar!).

Nun ist für alle $(x,y) \in X$:

$$Df(x,y) = (D_1 f(x,y), D_2 f(x,y)) = 0,$$

da $D_1 f(x,y) = \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{y} + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{-1} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{y}{y^2+x^2} - \frac{y}{x^2+y^2} = 0$,

und ebenso $D_2 f(x,y)$ wegen Symmetrie der Funktion in x und y.

Wegen Teil a) ist f also auf jedem der X_i konstant,

auf X_1 ist der Wert dann $f(1,1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

" X_2 " $f(-1,1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$,

" X_3 " $f(-1,-1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

" X_4 " $f(1,-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

Die Funktion f nimmt also nur die Werte $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ an. $\square$

$\rightsquigarrow$ Haben damit ein "Additionstheorem" für die arctan-Funktion bewiesen!

Aufgabe 22

Identifizieren $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$, genau: $\mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbb{R}^{n^2}$ sind als $\mathbb{R}$-Vektorräume isomorph.

Sei $GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \cdot A^{-1} = I_n\}$, I_n die n-te Einheitsmatrix. Betr. $GL_n(\mathbb{R})$ so als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n^2}$.

(a) **Beh.:** $GL_n(\mathbb{R}) \Subset \mathbb{R}^{n^2}$.

Bew.: Aus Linearer Algebra: $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det A \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$.

Nun ist $\det: \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ eine <u>stetige</u> Abbildung, etwa ersichtlich an der Laplaceschen Entwicklungsformel. Da $\mathbb{R}^{n^2} \setminus \{0\}$ offen in $\mathbb{R}^{n^2}$ ist, ist daher $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^{n^2} \setminus \{0\})$ offen in $\mathbb{R}^{n^2}$. $\square$

Aufgabe 22

(b) Beh.: Die Matrizenmultiplikationsabb. $M: \underbrace{GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})}_{V:=} \to GL_n(\mathbb{R})$,
$(A,B) \mapsto A \cdot B$, ist diff'bar.

Bew.: Es gilt für $A, B, H, K \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$M(A+H, B+K) - M(A,B) = (A+H)\cdot(B+K) - A\cdot B = AK + HB + HK.$$

Sei $m := \|H,K\| := \|(h_{11}, h_{21}, \dots, h_{nn}, k_{11}, \dots, k_{n,n})\|_\infty$
$:= \max\{|h_{11}|, |h_{12}|, \dots, |h_{n,n}|, |k_{11}|, \dots, |k_{n,n}|\}$ ($\|\cdot\|_\infty$ ist Norm auf V).

dann ist $\frac{HK}{\|H,K\|} = \frac{HK}{m} = \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^n h_{ij} k_{jl}\right)_{i,l} = \Big(\sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{h_{ij}}{m}}_{\le 1} \cdot \underbrace{k_{jl}}_{\le m \text{ im Betrag}}\Big)_{i,l}$,

wobei $\left|\sum_{j=1}^n \frac{h_{ij}}{m} k_{jl}\right| \le n\, m \xrightarrow{m \to 0} 0$, so daß $HK = o(\|H,K\|)$ folgt.

Also ist M diff'bar, und $M'(A,B): GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$
$(H,K) \mapsto AK + HB =: \varphi'(A,B)(H,K)$. □

Aufgabe 23

Vor.: $v = (v_1, v_2): U \to \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar sei Potential von v,
d.h. $\operatorname{grad} f = v$, es sei $\gamma: [0,1] \to U$ stetig diff'bar.

Beh.:

$$\int_0^1 \left(v_1(\gamma(t))\cdot \gamma_1'(t) + v_2(\gamma(t))\cdot\gamma_2'(t)\right)dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

(Anschaulich: l.S. = Kurvenintegral im Vektorfeld v, Potential f kann benutzt werden, um dieses zu berechnen! Die r.S. hängt nur noch von den Endpunkten des Weges γ ab, nicht mehr von γ selbst!)

Bew.: Haben $v = \operatorname{grad} f = (D_1 f, D_2 f)$.

Der Integrand läßt sich damit umschreiben als

$$v_1(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t) + v_2(\gamma(t))\cdot\gamma_2'(t) = D_1 f(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t) + D_2 f(\gamma(t))\cdot\gamma_2'(t)$$
$$= \left(D_1 f(\gamma(t)), D_2 f(\gamma(t))\right)\cdot\left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\right)^T$$
$$= (Df)(\gamma(t))\cdot(D\gamma)(t) = \frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right)$$

laut Kettenregel. Beachten: $f \circ \gamma: [0,1] \to \mathbb{R}$.

Somit ist

$$\text{l.S.} = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right)dt = \left[f(\gamma(t))\right]_0^1 = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$ □