Lösungshinweise zu Blatt 7

Stichworte: Extrema, Satz von Taylor, Kontraktion + Banachscher Fixpunktsatz

Bezeichnungen: Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $\mathcal{U}_a$ die Menge der offenen Umgebungen von a

Dann: f hat in a lokales $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\} :\iff \exists U \in \mathcal{U}_a : f_{|U} \left\{\begin{matrix}\le f(a)\\ \ge f(a)\end{matrix}\right\}$.

Gilt dies mit $U = D$, hat f in a ein globales Min./Max.

Existieren $D_i f(a)$ für alle $1 \le i \le n$,

- so heißt $a \in D$ kritischer Punkt von f, falls $D_i f(a) = 0$ für alle $1 \le i \le n$.
- Hat f in $a \in D$ ein Extremum, so ist a kritischer Punkt von f.

Satz zur Hessematrix: Ist f zweimal partiell diff'bar im kritischen Punkt a und ist $H(f;a) := (D_i D_j f(a))_{i,j}$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ semidefinit, so hat f in a ein lokales $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$. (Auch: $\operatorname{Hess} f(a) := H(f;a)$)

Aufgabe 25

(a) Untersuchung von $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf lokale und globale Extrema:

1.) $f(x,y) = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}$ (Bem. $= xy + 2yz + 2xz$ mit $z = \frac{32}{xy}$ ist die Oberfläche einer oben offenen Schachtel vom Volumen $xyz = 32$)

Erste partielle Ableitungen: $D_1 f(x,y) = y - \frac{64}{x^2}$, $D_2 f(x,y) = x - \frac{64}{y^2}$

Bestimmung kritischer Punkte von f: $D_1 f(x,y) = 0 \iff yx^2 = 64$, $D_2 f(x,y) = 0 \iff xy^2 = 64$,

also $\frac{x}{y} = 1$, $x^3 = 64$, also $x = y = 4$ $(z = 2)$. Dort Minimum:

Die Hessematrix ist $\begin{pmatrix} 2\cdot 64 x^{-3} & 1 \\ 1 & 2\cdot 64 y^{-3}\end{pmatrix}$, also pos. definit für $x = y = 4$.

2.) $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

Erste partielle Ableitungen: $D_1 g(x,y) = 3x^2 - 3$, $D_2 g(x,y) = 3y^2 - 12$,

Kritische Punkte: $\begin{Bmatrix} 3x^2 = 3 \\ \wedge\ 3y^2 = 12 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \pm 1 \\ \wedge\ y = \pm 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow (x,y) \in \{\underbrace{(1,2)}_{P}, \underbrace{(-1,2)}_{Q}, \underbrace{(1,-2)}_{R}, \underbrace{(-1,-2)}_{S}\}$.

Berechnung der Hessematrix: $D_1^2 g(x,y) = 6x$, $D_1 D_2 g(x,y) = 0 = D_2 D_1 g(x,y)$,

$D_2^2 g(x,y) = 6y$, also ist $H(g;(x,y)) = \begin{pmatrix} D_1^2 g(x,y) & D_1 D_2 g(x,y) \\ D_2 D_1 g(x,y) & D_2^2 g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$.

Haben $H(g;(1,2)) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, 2 positive EW $\rightsquigarrow$ Minimum bei P, auch global

$\left.\begin{array}{l} H(g;(-1,2)) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \\ H(g;(1,-2)) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$ 2 EW mit versch. VZ $\rightsquigarrow$ Sattelpunkt bei Q, R

$H(g;(-1,-2)) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$, 2 negative EW $\rightsquigarrow$ Maximum bei S, auch global.

$\square$

(e) Entwicklung von $x^2 + 3y - 2$ in Potenzen von $(x-1)$ und $(y+2)$
(mit Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung 2 im Punkt $(x_0, y_0) = (1,-2)$):

$$x^2 + 3y - 2 = -7 + 2\cdot(x-1) + 3\cdot(y+2) + (x-1)^2.$$

<u>Denn:</u>

$f(x,y) := x^2 + 3y - 2 \rightsquigarrow f(1,-2) = 1 - 6 - 2 = -7$ und

$D_1 f(x,y) = 2x$, $D_2 f(x,y) = 3$

$D_1^2 f(x,y) = 2$, $D_1 D_2 f(x,y) = 0$, $D_2^2 f(x,y) = 0$

Nun Taylorformel (vgl. Satz 2 [F], Kap. 7: $x + \xi \rightsquigarrow (x,y)$, $x \rightsquigarrow (1,-2)$.)

$$f(x,y) = f(1,-2) + D_1 f(1,-2)\cdot(x-1) + D_2 f(1,-2)\cdot(y+2)$$
$$+ \tfrac{1}{2} D_1^2 f(1,-2)\cdot(x-1)^2 + D_1 D_2 f(1,-2)(x-1)(y+2) + \tfrac{1}{2} D_2^2 f(1,-2)\cdot(y+2)^2,$$
$$+ \text{Rest (hier} = 0),$$

also: $x^2 + 3y - 2 = -7 + 2\cdot(x-1) + 3\cdot(y+2) + (x-1)^2$.

$\square$

Aufgabe 25

(c) Beh.: $A := [1,3] \subseteq \mathbb{R}$, $|\cdot|$ als Norm auf $\mathbb{R}$, $T(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ ist Kontraktion auf A.

Bew.: MWS

$\rightsquigarrow \; |T(x) - T(y)| \leq |T'(c)| \cdot |x-y|$ mit c zwischen x und y,

haben

$$|T'(x)| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right| \leq \frac{1}{2} \text{ für alle } x \in A = [1,3]$$

also ist T eine Kontraktion. $\square$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz ([F], Kap. 8, Satz 1) hat T also einen Fixpunkt, und jede Folge $c, T(c), T^2(c), T^3(c), \dots$ (für $c \in A$) konvergiert gegen den Fixpunkt ($\rightsquigarrow$ numerische Approximation).

Berechnung des Fixpunktes, direkt:

$$x = T(x) \iff x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \iff x = \frac{2}{x} \iff x^2 = 2,$$

da $x \in A$ folgt $\underline{\underline{x = \sqrt{2}}}$.

Aufgabe 27

Vor.: $U := (\mathbb{R}_{>0})^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}}}{1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$.

1. Beh.: Lokale Extrema von f: Bei $a := (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ liegt ein Maximum vor, $f(a) = \frac{1}{n+1}$.

Bew.: Partielle Ableitung: $D_i f(x) = \dfrac{\frac{1}{n+1} \cdot (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{x_i} \cdot (1 + x_1 + \ldots + x_n) - (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}} \cdot 1}{(1 + x_1 + \ldots + x_n)^2}$,

Kritischer Punkt: $\forall i$: $1 + x_1 + \ldots + x_n = (n+1) x_i \Leftrightarrow x_i = \frac{1}{n+1}(1 + x_1 + \ldots + x_n)$,
die x_i sind also alle gleich, etwa $= x$. Dann ist $1 + nx = (n+1)x \Leftrightarrow x = 1$,
d.h. bei $a := (1, 1, \ldots, 1)$ liegt ein kritischer Punkt vor, haben $f(a) = \frac{1}{n+1}$.
Dort hat f ein Maximum:
Haben $D_i f(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{x_i} \cdot f(x) - \frac{f(x)}{1 + x_1 + \ldots + x_n} = \left(\frac{1}{x_i (n+1)} - \frac{1}{1 + x_1 + \ldots + x_n} \right) \cdot f(x)$,
also $D_j D_i f(x) = \dfrac{f(x)}{(1 + x_1 + \ldots + x_n)^2} + (\quad \ldots \quad) \cdot D_j f(x)$ falls $j \neq i$,

$$\text{und } D_i^2 f(x) = \left(-\frac{1}{x_i^2 (n+1)} + \frac{1}{(1 + \ldots)^2} \right) f(x) + (\ldots) \cdot D_i f(x).$$

Somit: $D_j D_i f(a) = f(x) \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + 0 = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$
und $D_i^2 f(a) = \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(1+n)^2} \right) \cdot \frac{1}{n+1} + 0 = \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+1)^2} < 0$

Dann ist $H(f; a) = (D_i D_j f(a))_{i,j}$ neg. definit:
$H(f;a) = \frac{1}{(n+1)^3} \cdot \begin{pmatrix} -n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -n & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & & \cdots & -n \end{pmatrix}$, denn $-H(f;a) = \frac{1}{(n+1)^3} \cdot \begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \cdots \\ -1 & n & -1 & \cdots \\ -1 & -1 & n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ hat als k-te ($k \leq n$) Unterdeterminante
einen Wert $\geq n^k - (k-1) n^{k-1}$
$\geq n^{k-1} \geq 0$

2. Beh.: $\forall y_1, \ldots, y_{n+1} > 0$: $\sqrt[n+1]{y_1 \cdots y_{n+1}} \leq \dfrac{y_1 + \ldots + y_{n+1}}{n+1}$

Bew.: Setze $x_i := \frac{y_i}{y_{n+1}}$ für $1 \leq i \leq n$ und wegen 1. Beh. gilt $\dfrac{(y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n+1}} \cdot y_{n+1}^{-\frac{n}{n+1}}}{1 + \frac{y_1}{y_{n+1}} + \ldots + \frac{y_n}{y_{n+1}}} \leq \frac{1}{n+1}$,
was äquivalent ist zu
$\dfrac{(y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n+1}} \cdot y_{n+1}^{-\frac{n}{n+1}+1}}{y_1 + \ldots + y_{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$, mit $-\frac{n}{n+1} + 1 = \frac{1}{n+1}$ folgt die 2. Beh. $\square$

Aufgabe 26

Beh.: $\forall_{x,y>0}\ \exists \theta \in [0,1]: \ \log\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y-2}{2+\theta(x+y-2)}$

Bew.: Benutzen Taylor-Formel mit Linearem Term als Restterm,
Entwicklungsstelle: $a = (x_0, y_0) = (1,1)$.

Sei $f: \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \log\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Dann: $f(1,1) = 0$ und laut Taylor-Satz:

$$f(x,y) = f(1,1) + D_1 f\begin{pmatrix}1+\theta(x-1)\\ 1+\theta(y-1)\end{pmatrix}\cdot(x-1) + D_2 f\begin{pmatrix}1+\theta(x-1)\\ 1+\theta(y-1)\end{pmatrix}\cdot(y-1) \text{ für } \theta \in [0,1].$$

(Beachten, dass Vor. für Taylor-Satz ([F], Satz 2, Kap. 7: $x+\xi \rightsquigarrow (x,y)$, $x \rightsquigarrow (1,1)$) erfüllt sind: U ist offen & konvex, und f ist stetig diff'bar auf U.)

Haben $D_1 f(x,y) = \frac{1}{x+y} = D_2 f(x,y)$,

also $\log\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x,y) = 0 + D_1 f\begin{pmatrix}1+\theta(x-1)\\ 1+\theta(y-1)\end{pmatrix}\cdot(x-1) + D_2 f(\dots)\cdot(y-1)$

$$= \frac{x-1+y-1}{2+\theta(x-1)+\theta(y-1)} = \frac{x+y-2}{2+\theta(x+y-2)}.$$

$\square$

Aufgabe 28

(a) Vor.: $M := \mathbb{R}^2$, $\|u\|_\infty := \max\{|u_1|, |u_2|\}$,

$$f(u) := \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot u + \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{8}(u_1 - u_2 + 8),\ \tfrac{1}{8}(-2u_1 + 3u_2 - 8)\right)^T.$$

- Beh.: $(M, \|\cdot\|_\infty)$, f erfüllt die Vor. im Banachschen Fixpunktsatz [F], Satz 1, Kap. 8: $(A=M)$
  $(M, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollst. normierter VR, und f ist eine Kontraktion, d.h. $\exists \theta \in]0,1[\ \forall_{u,v\in M}: \|f(u)-f(v)\|_\infty \le \theta\cdot\|u-v\|_\infty$.

(Bem: ist abhängig von der Norm: $T := \begin{pmatrix}0.1 & -0.4\\ -0.4 & 0.8\end{pmatrix}$ ist Kontraktion bzgl. $\|\cdot\|_2$, aber nicht bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.)

Bew.: Für $u, v \in M$ ist

$$\|f(u)-f(v)\|_\infty = \frac{1}{8}\left\| \big((u_1-v_1)-(u_2-v_2),\ -2(u_1-v_1)+3(u_2-v_2)\big)^T \right\|_\infty$$

$$= \frac{1}{8}\cdot \max\{ |u_1-v_1-u_2-v_2|, |-2u_1+2v_1+3u_2-3v_2| \}$$

$$\le \frac{1}{8}\cdot \max\{2,5\} \cdot \max\{|u_1-v_1|, |u_2-v_2|\} \le \frac{5}{8}\cdot \|u-v\|_\infty,$$ damit ist $\theta := \frac{5}{8}$ ein gültiger Kontraktionsfaktor. □

- Direktes Berechnen des Fixpunktes: $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\ -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8x\\ 8y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = x-y+8 \rightsquigarrow y=-7x+8\\ 8y=-2x+3y-8 \rightsquigarrow 5y=-2x-8\end{cases}$

$\rightsquigarrow -35x+40=-2x-8 \rightsquigarrow -33x=-48 \rightsquigarrow x=\frac{16}{11},\ y=-\frac{7\cdot 16}{11}+\frac{88}{11}=\frac{-24}{11} \rightsquigarrow \frac{1}{11}(16,-24)^T \approx \underline{(1{,}455, -2{,}182)^T}$

- 2 Iterationen mit

$v_0=(1,-2)^T$: $\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1+2+8\\ -2-6-8\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{8}\begin{pmatrix}11\\ -16\end{pmatrix}}$, $\frac{1}{8^2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\ -16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{8^2}\begin{pmatrix}11+16+8^2\\ -22-3\cdot 16-8^2\end{pmatrix}$

$= \underline{\frac{1}{8^2}\cdot\begin{pmatrix}91\\ -134\end{pmatrix}} \approx \begin{pmatrix}1{,}422\\ -2.094\end{pmatrix}$

(b) Vor.: (X,d) kompakter metrischer Raum,
$\varphi: X \to X$ schwach kontrahierend, d.h. $\forall x,y \in X, x \neq y: d(\varphi(x),\varphi(y)) < d(x,y)$.

Beh.: $\exists z \in X: \varphi(z)=z$, und ist $\bar z \in X$ mit $\varphi(\bar z)=\bar z$, so folgt $\bar z = z$.

Bew.: Existenz von z:

Def. $\psi: X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, $\psi(x) := d(\varphi(x), x)$.

Da φ stetig, ist ψ stetig.

Da ψ auf einem Kompaktum def. ist, ist dann auch $\psi(X)$ kompakt in $\mathbb{R}_{\ge 0}$, ψ nimmt also ihr Minimum an, etwa bei z. Ist $\psi(z)=0$, ist z Fixpunkt von φ. Sonst ist $\psi(z)>0$. Dann gilt

$$\psi(z) = d(\varphi(z), z) > d(\varphi(\varphi(z)), \varphi(z)) = \psi(\varphi(z)),$$

im ↯ zur Ann., dass ψ bei z ihr Minimum annimmt.

Eindeutigkeit von z:

Wäre $\varphi(\bar z)=\bar z$, $\varphi(z)=z\neq\bar z$, so folgte $\underbrace{d(\varphi(\bar z), \varphi(z))}_{=d(\bar z, z),\text{ da Fixpunkte}} < d(z,\bar z)$, ↯. □