Lösungshinweise zu Blatt 8, Analysis 2:

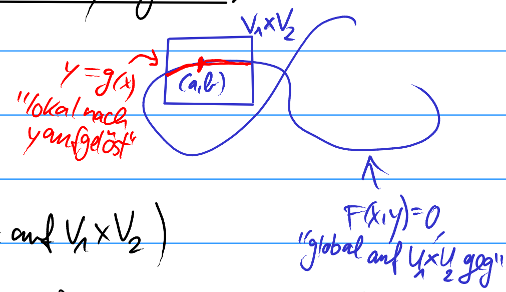
Stichworte: impliziter Funktionensatz, Satz über lokale Umkehrbarkeit

1 Der implizite Funktionensatz:

Vor.: Sei $F: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$, $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$, F stetig diff'bar, $(a,b) \in U_1 \times U_2$ mit $F(a,b)=0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertierbar.

"g nahe a definiert"

Beh.: Dann gibt es in $\mathbb{R}^n$ offene Teilmengen $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$, mit $a \in V_1$, $b \in V_2$, und eine stetig differenzierbare Funktion $g: V_1 \to V_2$, $g(a)=b$, so dass für alle $(x,y) \in V_1 \times V_2$ gilt: $\big(F(x,y)=0 \iff y=g(x)\big)$.



Es gilt: $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$

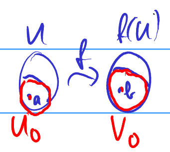
für $(x,y) = (x,g(x)) \in V_1 \times V_2$,

(Sofern $\frac{\partial F}{\partial y}$ in (x,y) invertierbar, dies gilt nahe $(a,b) \leadsto$ OE auf $V_1 \times V_2$)

Bezeichnungen: $\frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le \mu\le m\\ 1\le j\le k}} \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le k}} \in \mathbb{R}^{m\times k}$,

und $\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

2 Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit:



Vor.: $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar, $a \in U$, $b := f(a)$, $Df(a)$ inv'bar.

Beh.: Dann gibt es in $\mathbb{R}^n$ offene Teilmengen $U_0 \subseteq U$, $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \in U_0$, $b \in V_0$ so, dass

das heißt "lokal umkehrbar" in a (1) und 2))

1) f die Menge U_0 bijektiv auf V_0 abbildet,

2) die Umkehrabb. $g = f^{-1}: V_0 \to U_0$ ist stetig diff'bar mit $Dg(b) = (Df(a))^{-1}$.

vgl. mit: $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$

[Ferner auch so, dass $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in U_0$, und: $\forall y \in V_0$: $Dg(y) = \left(Df(g(y))\right)^{-1}$.] !

Aufgabe 30

(a) **Beh.:** $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (x^2-y^2, 2xy)$, ist lokal umkehrbar (in allen Punkten des Def.bereichs) aber nicht injektiv.

Bew.: i) f ist lokal umkehrbar, d.h. für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ lokal umkehrbar:

Haben: $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}$, $\det Df(x,y) = 4x^2+4y^2 \neq 0$

und $\frac{1}{4x^2+4y^2} \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \cdot Df(x,y) = \mathbb{1}_{2\times 2}$, d.h. $Df(x,y)$ ist invertierbar.

Nach $\boxed{2}$ ist f in (x,y) lokal umkehrbar. $\square$

ii) f ist nicht injektiv: Für $(x,x) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, also auch $(-x,-x) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, gilt $f(-x,-x) = ((-x)^2 - (-x)^2, 2x^2) = (0, 2x^2) = f(x,x)$, obwohl $(x,x) \neq (-x,-x)$. $\square$

(b) **Beh.:** Es gibt keine stetig differenzierbare bijektive Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Bew.: Sonst sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart.

Nicht überall ist $Df(x) = 0$, denn sonst wäre f konstant nach Aufgabe 24a), und dann wäre f nicht surjektiv.

"OE" = ohne Einschränkung

Sei OE $Df(0) \neq 0$ und $f(0) = 0$. (Sonst verschieben wir f: Ist $Df(c) \neq 0$ für $c \in \mathbb{R}^2$, betr. anstelle f die Abb. $\tilde{f}(x) := f(x+c) - f(c)$.)

Dann ist $D_1 f(0) \neq 0$ oder $D_2 f(0) \neq 0$, OE sei $D_2 f(0) \neq 0$.

Nach $\boxed{1}$ folgt: $f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$ für eine Abb. g nahe 0, d.h. für alle $x \in V_1$ (= Def.bereich von g) gilt $f(x, g(x)) = 0$.

Da V_1 offen, ex. so ein $x \neq 0$.

Damit gibt es Punkte $(x,y) \neq 0$ mit $f(x,y) = 0 = f(0)$, im $\lightning$ zur Injektivität von f. $\square$

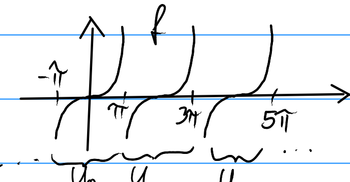
Aufgabe 29 (Präsenzaufgabe)

(a) Vor.: $U_1=\mathbb{R}^k$, $U_2=\mathbb{R}^m$, $f: U_1\times U_2\to\mathbb{R}^m$ linear,
d.h. $f(x,y)=Ax+By$ mit $A\in\mathbb{R}^{m\times k}$, $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$, B inv'bar.
Beh.: $\exists g: U_1\to U_2$ linear: $(f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=g(x))$ für alle $x\in U_1$,
nämlich $g(x):=-B^{-1}Ax$ (damit ist dann auch $Dg(x)=-B^{-1}Ax$).
(Impliziter Funktionensatz $\boxed{1}$ im linearen Fall ist direkt überprüfbar)
Bew.: Mit dem angegebenen g haben wir:
- $y=g(x)\Rightarrow f(x,y)=f(x,g(x))=Ax+Bg(x)=Ax+B\cdot(-B^{-1}Ax)=Ax-Ax=0$,
- $f(x,y)=0\Rightarrow Ax+By=0\Rightarrow By=-Ax\Rightarrow y=-B^{-1}Ax=g(x)$. □

(b) Vor.: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y^3+xy^2-3$ (als Schar von Polynomen in y mit Parameter x).
Beh.: $\exists\, \varepsilon,\delta>0\ \ \forall x\in\,]2-\varepsilon,2+\varepsilon[\ \ \exists\, y\in\,]1-\delta,1+\delta[$, y eindeutig: $f(x,y)=0$.
Bew.: Haben $f(2,1)=0$. Wenden $\boxed{1}$ an auf $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a=2$, $b=1$, (machbar da $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=3\cdot1^2+2\cdot2\cdot1\neq0$). Erhalten so $V_1\ni 1$, $V_2\ni 2$, und $g:V_1\to V_2$ mit $(f(x,y)=0\Leftrightarrow y=g(x))$, dabei ex. $y=g(x)$ eindeutig (denn laut Beh. in $\boxed{1}$ ist g eine Funktion). Schreiben: $V_1=\,]2-\varepsilon,2+\varepsilon[$ und $V_2=\,]1-\delta,1+\delta[$ mit $\varepsilon,\delta>0$. □

Bem.: Vgl. diese Aufgabe mit $h(x,y):=y^2-x$, dann $h(0,0)=0$, $Dh(0,0)=0$.
Die Beh. von $\boxed{1}$ gilt nicht: für $x<0$ hat $h(x,y)$ keine Nst. in y, für $x>0$ hat $h(x,y)$ zwei Nst. in y. Die Vor. "$D_2 f(a,b)$ inv'bar" ist nötig!

(c) Vor.: $f:\mathbb{R}\setminus S\to\mathbb{R}$, $f(x):=\tan x$.
Beh.: f hat die lokalen Umkehrfunktionen $g_k:\mathbb{R}\to\,]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi[\,=:U_k$,
$g_k(y):=\arctan y+2k\pi$ (für alle $k\in\mathbb{Z}$),
und für jedes offene $U\subseteq U_k$ auch $g_k|_{f(U)}$
(und noch mehr, die man aus Teilmengen verschiedener "Zweige" (vgl. Aufg. 32) "zusammensetzen kann")



Bew.: Haben $f'(x)=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}\neq0$ für $x\notin S$, und dort nach $\boxed{2}$ lokale Umkehrbarkeit. Haben $\mathbb{R}\setminus S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}U_k$ mit zusammenhängenden U_k, dort ist f also umkehrbar. Die Umkehrung von f auf U_0 ist per Def. der arctan, auf den U_k nutze die Periodizität von $\cos x$, um g_k zu erhalten. □

Zu Aufgabe 29:

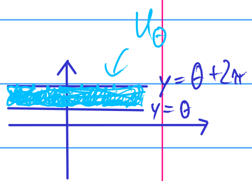
(d) <u>Vor.:</u> $f: \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\quad f(r,\varphi):=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$.

(Übergangsfunktion zwischen kartesischen und Polar-Koordinaten, vgl. [F], Bsp. (8.4))

<u>Beh.:</u> Haben lokale Umkehrfunktionen von f: etwa die Funktionen $g_\theta: \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to U_\theta$,

$g_{V_\theta}(x,y) := \left((x^2+y^2)^{1/2},\ \arg_\theta(x,y)\right)$,

wo $\arg_\theta(x,y)$ diejenige Zahl φ mit $\theta\le\varphi<\theta+2\pi$ und $x=r\cos\varphi$ & $y=r\sin\varphi$ ist,



und $U_\theta := \{(r,\varphi)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R};\ \theta\le\varphi<\theta+2\pi\}$. Dabei ist $\theta\in\mathbb{R}$ beliebig.

(Jedes g_{V_θ} stellt einen Zweig dar gemäß Aufgabe 32.)

(Lokale Umkehrbarkeit von f: $Df(r,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$, $\det = r\neq 0$
$\rightsquigarrow$ überall auf $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$)

Wie bei (c) erhält man weitere g_U für in $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$ offene $U\subseteq U_\theta$ (und ev. deren Zusammensetzung.)

$$\rightsquigarrow \frac{\partial\arg_\theta(x,y)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\arg_\theta(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\ \ldots$$

Aufgabe 31

(a) <u>Vor.:</u> $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,y):=x_1^2+x_2^2+y^2-1$, $a=(0,0)$, $b=1$,

also $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=2\cdot 1\neq 0$.

<u>Beh.:</u> Die Abb. $g: V_1\to V_2$, $V_1:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ x_1^2+x_2^2<1\}$, $V_2=]0,\infty[$,

$g(x_1,x_2):=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ erfüllt die Beh. von $\boxed{1}$.

<u>Bew.:</u> Aus $f(x_1,x_2,y)=0 \iff x_1^2+x_2^2+y^2=1 \iff y^2=1-x_1^2-x_2^2$

erhält man, falls $1-x_1^2-x_2^2>0$ ist, die Lösungen $y=\pm\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$

für $g(x)$.

Nahe $(a,b)=(0,0,1)$ erhalten wir also die positive Lösung $y=+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$,

und $g(x_1,x_2):=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ ist eine st. diff'bare Abb. $g: V_1\to V_2$.

(V_1 ist maximal offen mit $a=(0,0)\in V_1$, V_2 maximal offen mit $b=1\in V_2$,

so, dass g auf V_1 <u>eind.</u> definiert ist). □

<u>Bem.:</u> g ordnet einem Punkt (x_1,x_2) der offenen Einheitskreisscheibe V_1 das $y>0$ zu, für das (x_1,x_2,y) auf der Einheitssphäre liegt.

zu Aufgabe 31

(b) <u>Vor.:</u> $U \subset \mathbb{R}$, $0 \in U$, $u, v: U \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, $u(0) = v(0) = 0$,
und für $u = u(x)$, $v = v(x)$ gelte $\quad u + 2u^2 + v^2 + x^2 + 2v - x = 0$
und $\quad xuv + e^u \sin(v+x) = 0$.

<u>Beh.:</u> $u'(0) = 3$, $v'(0) = -1$.

<u>Bew.:</u> Wollen das – nichtlineare! – Gleichungssystem "nach u und v auflösen", aber Satz $\boxed{1}$ sichert die <u>Existenz</u> von u und v:
(Explizites Auflösen ist hier faktisch unmöglich!)

Schreiben
$$f(x,u,v) := \left(u + 2u^2 + v^2 + x^2 + 2v - x,\ xuv + e^u \sin(v+x)\right)^T, \text{ also}$$
$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, betrachten dies nahe $(0,0,0) = 0$ (beachte $f(0) = 0$).

Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,u,v) = \begin{pmatrix} 1+4u & 2v+2 \\ xv + e^u \sin(v+x) & xu + e^u \cos(v+x) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} (\leftarrow D_1 f_1, D_2 f_2) \\ (\leftarrow D_1 f_2, D_2 f_2) \end{matrix}$$
also
$$\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ist invertierbar.}$$
Nach $\boxed{1}$ existieren u, v nahe $x = 0$.

Deren Ableitung bestimmt sich aus
$$\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,0)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)\right) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

denn $\frac{\partial f}{\partial x}(x,u,v) = \left(2x - 1,\ uv + e^u \cos(v+x)\right)^T$, also $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

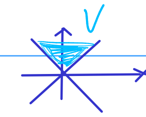
Es folgt
$$\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Aufgabe 32

<u>Vor.:</u> $f: U \to \mathbb{R}^n$ lokal umkehrbar auf $U \subset \mathbb{R}^n$,
(für die Def.) d.h. $\forall x \in U$: f lokal umkehrbar in x, d.h. f stetig diff'bar und $Df(x)$ inv'bar für alle $x \in U$.

<u>Def.:</u> Die für ein $U_0 \subseteq U$, U_0 offen in $\mathbb{R}^n$, gebildete Umkehrfunktion $g: f(U_0) \to U_0$ heißt ein <u>Zweig</u> von f^{-1} auf $f(U_0)$
(abhängig von U_0, man könnte genauer auch g_{U_0} schreiben).

Zu Aufgabe 32:



Vor.: $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y):=(x^2+y^2,\ x^2-y^2)$, $V:=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\ u+v>0, u-v>0\}$.

Beh.: 1) Die Funktionen $G_i: V\to U_i$, $1\le i\le 4$, Def. der U_i s.u.,

$G_1(u,v):=\frac{1}{\sqrt2}(\sqrt{u+v}, \sqrt{u-v})$, $G_2(u,v):=\frac{1}{\sqrt2}(-\sqrt{u+v}, \sqrt{u-v})$,

$G_3(u,v):=\frac{1}{\sqrt2}(-\sqrt{u+v}, -\sqrt{u-v})$, $G_4(u,v):=\frac{1}{\sqrt2}(\sqrt{u+v}, -\sqrt{u-v})$,

sind Zweige von F^{-1} auf V.

2) Nahe $(1,0)\in V$ wird G_i approximiert durch die affine Transformation

$L_i(u,v):=G_i(1,0)+DG_i(1,0)\cdot\binom{u}{v}$, nämlich $L_1(u,v)=\frac{1}{2\sqrt2}(2+u+v,\ 2+u-v)$,

$L_2(u,v)=\frac{1}{2\sqrt2}(-2-u-v,\ 2+u-v)$, $L_3(u,v)=\frac{1}{2\sqrt2}(-2-u-v,\ -2-u+v)$,

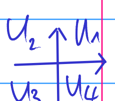
und $L_4(u,v)=\frac{1}{2\sqrt2}(2+u+v,\ -2-u+v)$.

Bew.: Haben: F lokal umkehrbar auf $\mathbb{R}^2\setminus A=:U$, $A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy=0\}$ das Achsenkreuz,

d.h. F ist diff'bar und $DF(x,y)=\begin{pmatrix}2x & 2y\\ 2x & -2y\end{pmatrix}$,

also $\det DF(x,y)=-8xy\neq0$ genau für $x\cdot y\neq0$, d.h. $(x,y)\notin A$.

Betr. die vier Zusammenhangskomponenten $U_1,\ldots,U_4$ von $\mathbb{R}^2\setminus A$, nämlich



$U_1:=\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}$, $U_2:=\mathbb{R}_{<0}\times\mathbb{R}_{>0}$, $U_3:=\mathbb{R}_{<0}\times\mathbb{R}_{<0}$, $U_4:=\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{<0}$.

Zu 1): Laut $\boxed{2}$ stellt F auf jedem U_i eine bijektive Funktion dar

mit Bild $f(U_i)\overset{!}{=}V$,

⌈denn $u=x^2+y^2$, $v=x^2-y^2$ erfüllen $u+v=2x^2>0$, $u-v=2y^2>0$, d.h. „$\subseteq$",

und ist $u+v>0$, $u-v>0$, so folgt $u=x^2+y^2$, $v=x^2-y^2$

mit $x:=\pm\sqrt{\frac{u+v}{2}}$, $y:=\pm\sqrt{\frac{u-v}{2}}$ mit $\pm$ so, dass $(x,y)\in U_i$, d.h. „$\supseteq$". ⌋

Auf U_i hat F die Umkehrfunktion $G_i: V\to U_i$, $1\le i\le4$, wie angegeben,

die vier Funktionen stellen demnach verschiedene Zweige von F^{-1} dar.

Zu 2): Aus $(u_i,v_i):=G_i(1,0)\in U_i$ folgt $(u_1,v_1)=\frac{1}{\sqrt2}(1,1)$, $(u_2,v_2)=\frac{1}{\sqrt2}(-1,1)$,

$(u_3,v_3)=\frac{1}{\sqrt2}(-1,-1)$, $(u_4,v_4)=\frac{1}{\sqrt2}(1,-1)$.

Es gilt für $1\le i\le4$: $DG_i(1,0)=(DF(u_i,v_i))^{-1}$ laut $\boxed{2}$,

also $DG_1(1,0)=\frac{1}{2\sqrt2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $DG_2(1,0)=\frac{1}{2\sqrt2}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$,

$DG_3(1,0)=\frac{1}{2\sqrt2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $DG_4(1,0)=\frac{1}{2\sqrt2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

Somit: $G_1(1,0)+DG_1(1,0)\cdot(u,v)=\frac{1}{\sqrt2}(1,1)+\frac{1}{2\sqrt2}(u+v,u-v)=\frac{1}{2\sqrt2}(2+u+v,\ 2+u-v)$, usw. $\square$