Lösungshinweise zu Blatt 9, Analysis 2:

Themen: Extrema mit Nebenbedingungen / Lagrange-Multiplikatoren (Satz 4 S. 114), Satz vom parameterabh. Integral (i.e. Satz 2 auf S. 120/121 bei [F]), [den Satz von Fubini (dort Satz 3) nur erwähnen], Def. UMF und Immersion

Aufgabe 33

(a) **Vor.:** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y):=x^2+xy+y^2$, $Q:=[0,1]^2$.

Beh.: f hat auf Q bei $(x,y)=(0,0)$ ein Minimum mit $f(0,0)=0$, und bei $(x,y)=(1,1)$ ein Maximum mit $f(1,1)=3$.

Bew.: • Betrachten erst das Quadratinnere $\mathring{Q}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ und bestimmen dort erst die kritischen Stellen: Haben $D_1f(x,y)=2x+y$, $D_2f(x,y)=x+2y$ also ex. nur in $(x,y)=(0,0)$ eine kritische Stelle.
Bestimmung der Hessematrix dort: Haben $D_1^2f(x,y)=2$, $D_2^2f(x,y)=2$, und $D_1D_2f(x,y)=1$, also ist $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ die Hessematrix, welche positiv definit ist ($2>0$ und $2\cdot2-1\cdot1>0$), also liegt in $(0,0)$ (ist dann aber Randpunkt von Q) ein Minimum vor ($f(0,0)=0$), dieses ist sogar ein globales Minimum.

• Wir bestimmen nun die Extrema auf dem Quadratrand ∂Q, also die von f unter den Nebenbedingungen $\underline{xy=0}\vee(x-1)(y-1)=0$. Dies setzen wir an mittels (Satz 4, S. 114) Lagrange-Multiplikatoren: Betr. die Fkt. $g,h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=xy$, $h(x,y)=(x-1)(y-1)$.
$M_1:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ g(x,y)=0\}$ ist UMF von $\mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{Rang}\underbrace{(Dg)(x,y)}_{(y,x)}=1$ für $(x,y)\neq(0,0)$ ✓,
ebenso $M_2:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ h(x,y)=0\}$.
Untersuchen nun M_1 und M_2 getrennt [die NB $xy(x-1)(y-1)$ ist zu rechenintensiv].

$\underline{M_1}$: Bestimme nun $a=(x,y)$ und λ (← L-Multiplikator!) so, daß
(Lagrange-Ansatz) $\leadsto$ $\operatorname{grad} f(a)=\lambda\operatorname{grad} g(a)$ gilt:

$$\operatorname{grad} f(a)=(2x+y,\ x+2y)\stackrel{!}{=}\lambda\cdot(y,x)\iff\left\{\begin{matrix}2x+(1-\lambda)y=0\\(1-\lambda)x+2y=0\end{matrix}\right\}\leadsto\det\begin{pmatrix}2&1-\lambda\\1-\lambda&2\end{pmatrix}=0$$

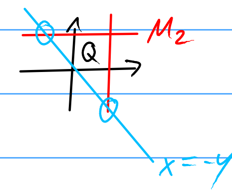
$\leadsto\lambda^2-2\lambda-3=0\leadsto\lambda_1=3,\ \lambda_2=-1.$

Für $\lambda_1=3$ folgt $2x-2y=0\iff x=y$, für $\lambda_2=-1$ folgt $x=-y$, für $(x,y)\in M_1$ also $(x,y)=(0,0)$ ✓.

M_2:

Der analoge Ansatz für h, nämlich $\operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} h(a)$ führt auf dieselbe Rechnung, also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$.

Für $\lambda_2 = -1$ folgt $x = -y$, was zu Lösungen $\notin \partial Q$ führt:



Für $\lambda_1 = 3$ folgt $x = y$, was zur Lösung $(1,1)$ auf ∂Q führt.
Haben $f(1,1) = 3$, dort liegt also das Maximum von f auf Q. $\square$

(b) Beh.: Die Hyperbel $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ hat den Abstand zum Ursprung.

Bew.: Zu bestimmen ist das Minimum der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ mit $g(x,y) := x^2 + 8xy + 7y^2 - 225$.

Dann ist $a = (x,y)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ zu bestimmen mit

$\operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} g(a)$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (2x+8y)\cdot\lambda = 2x \\ (8x+14y)\cdot\lambda = 2y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (\lambda-1)x + 4\lambda y = 0 \\ 4\lambda x + (7\lambda - 1)y = 0 \end{Bmatrix}$$, gesucht: nicht triv. Lsg. für x, y,

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 2x+8y & \overset{\lambda}{8y+14} \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} 1$$

also: $\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 4\lambda \\ 4\lambda & 7\lambda-1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(7\lambda-1) - 16\lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{8}{9}\lambda - \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{4}{9} \pm \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{9}{81}} = -\frac{4}{9} \pm \frac{5}{9}$

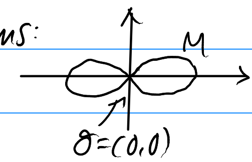
$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{9},\ \lambda_2 = -1$

1. Fall: für $\lambda = -1$ ist $\begin{Bmatrix} -2x - 8y = 2x \\ -8x - 14y = 2y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 2y = -x$,
also $x^2 - 4x^2 + \frac{7}{4}x^2 = 225$ (NB)
$\Leftrightarrow -\frac{5}{4}x^2 = 225$, unlösbar!

2. Fall: für $\lambda = \frac{1}{9}$ ist $2x + 8y = 18x \Leftrightarrow 2x = y$,
also $x^2 + 16x^2 + 7\cdot 4x^2 = 225 \Leftrightarrow 45x^2 = 225 \Leftrightarrow x^2 = 5$, d.h. $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$.
der Abstand dazu ist $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5 + 4\cdot 5} = \sqrt{25} = 5$.

(c) Beh.: Die Lemniskate $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $a\neq 0$, ist keine UMF.

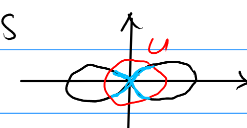
Bew.: Die Kurve ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$, ihr Graph sieht etwa so aus:



Im Punkt $O=(0,0)$ haben wir einen Überschneidungspunkt:
Gehen wir zu Polarkoordinaten über, d.h. wir substituieren $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, so lautet die Kurvenglg. $r^4=2a^2r^2\cdot(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$\iff r^2=2a^2\cos 2\theta$.

Dabei wird $r=0$ genau für $\theta\in\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\}$,
und Werte für $r\geq 0$ gibt's nur für $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]\cup[\frac{7\pi}{4},2\pi]$.
Im Ursprung treffen sich also vier "Äste" der Kurve. Bei einer UMF (vgl. Def. [F]) müsste O eine Umgebung U haben, so dass es eine Immersion $\varphi: T\to M\cap U$ gibt mit $T\subseteq\mathbb{R}^1$ offen. Wegen Satz 1 [F], S. 105, ist dies aber nicht möglich: ist $c\in T$ mit $\varphi(c)=O$, so kann ein offenes IV V, das c enthält, nicht (injektiv und) homöomorph auf $M\cap U$ abgebildet werden (anschaulich).



$M\cap U$ sieht "homöomorph" so aus wie das Achsenkreuz, welches nicht homöomorph zu einem IV ist (müßte man strenggenommen beweisen...)

- „homöomorph“ = bijektiv, stetig und Umkehrabb. auch stetig

Aufgabe 34

Beh.: Es gilt $\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\,dx=\log 2$.

Bew.: Betr. $f(\alpha):=\int_0^1\frac{x^\alpha-1}{\log x}\,dx$, $\alpha>0$, gesucht ist $f(1)$.

Es ist

$$f'(\alpha) \overset{\circledast}{=} \int_0^1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{x^\alpha-1}{\log x}\right)}_{\text{zu zeigen: ist stetig auf } [0,1]\times[\alpha_0,\alpha_1]\text{, s.u.}}dx = \int_0^1 x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}.$$

Integration zeigt: $f(\alpha)=\log(\alpha+1)+c$, da $f(0)=0$ ist aber $c=0$, also $f(\alpha)=\log(\alpha+1)$ und somit $f(1)=\underline{\underline{\log 2}}$. Begründung für Schritt $\circledast$:

Haben:

$$F(x,\alpha):=\begin{cases}\frac{x^\alpha-1}{\log x}, & 0<x<1\\ 0, & x=0\\ \alpha, & x=1\end{cases}$$

ist stetig in x und α für $x\in[0,1]$ und alle $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$ für gewisse $0<\alpha_0<\alpha_1$:
$\lim_{x\to1}\frac{x^\alpha-1}{\log x}=\alpha$, $\lim_{x\to0}\frac{x^\alpha-1}{\log x}=0$ nach de l'Hôpital.

Somit ist die Anwendung des Satzes vom parameterabhängigen Integral in $\circledast$ erlaubt. $\square$

Aufgabe 35

Vor.: Seien $f, g, h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktionen

$$f(x,y,z) := x+y+z, \quad g(x,y,z) := 2x+3y+2z, \quad h(x,y,z) := x-y+2z.$$

(a) Gesucht: Extrema von f auf $S^2 = \{(x,y,z) \mid \|x\|_2 = 1\} = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2-1=0\}$,

d.h. unter der Nebenbedingung $\tilde{g}(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1 \stackrel{!}{=} 0$.

Ansatz mit Lagrangemultiplikator λ: $\quad \operatorname{grad} f(x,y,z) \stackrel{!}{=} \lambda \operatorname{grad} \tilde{g}(x,y,z)$

$\Leftrightarrow (1,1,1) = \lambda \cdot (2x, 2y, 2z)$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2x}$, und $x=y=z \ (\neq 0)$ $\quad$ [Alternativ: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ hat Rang $<2 \Leftrightarrow x=y=z$]

NB: Die Punkte der Gestalt (x,x,x) auf S^2 sind, wegen $3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

gleich $\frac{1}{3}\sqrt{3}(1,1,1)$ und $-\frac{1}{3}\sqrt{3}(1,1,1)$.

Ergebnis: Im Punkt $\frac{1}{3}\sqrt{3}(1,1,1)$ hat f das Maximum $\sqrt{3}$ auf S^2,

im Punkt $-\frac{1}{3}\sqrt{3}(1,1,1)$ das Minimum $-\sqrt{3}$.

(b) Gesucht: Extrema von g auf $E \cap Z$ mit $E := \{(x,y,z) \mid x+z=1\}$

und $Z := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=2\}$. Bez. $\tilde{g}_1(x,y,z) := x+z-1$, $\tilde{g}_2(x,y,z) := x^2+y^2-2$.

Ansatz mit Lagrangemultiplikatoren λ_1 und λ_2 (die NB hat zwei Gleichungen $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$!):

$\operatorname{grad} g(x,y,z) = \lambda_1 \operatorname{grad} \tilde{g}_1(x,y,z) + \lambda_2 \operatorname{grad} \tilde{g}_2(x,y,z)$

$\Leftrightarrow (2,3,2) = \lambda_1 (1,0,1) + \lambda_2 (2x, 2y, 0)$

$\Leftrightarrow x=0$, y,z bel., $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ $\quad$ [Alternativ: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$ hat Rang $<3 \Leftrightarrow x=0$, y,z bel.]

NB: Die Punkte mit $x=0$ auf $E \cap Z$ sind die mit $z=1$, $y = \pm\sqrt{2}$.

Ergebnis: Im Punkt $(0, \sqrt{2}, 1)$ hat g das Maximum $3\sqrt{2}+2$ auf $E \cap Z$,

im Punkt $(0, -\sqrt{2}, 1)$ das Minimum $-3\sqrt{2}+2$.

(c) Gesucht: Extrema von h auf $M := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+2z^2=2\}$. Bez. $\tilde{g}_3(x,y,z) := x^2+y^2+2z^2-2$.

Ansatz mit Lagrangemultiplikator λ: $\operatorname{grad} h(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} \tilde{g}_3(x,y,z)$

$\Leftrightarrow (1,-1,2) = \lambda(2x, 2y, 4z) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2\lambda}, y = -\frac{1}{2\lambda}, z = \frac{1}{2\lambda}, \lambda \neq 0$ $\quad$ [Alternativ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2x & 2y & 4z \end{pmatrix}$ hat Rang $<2 \Leftrightarrow x=z=-y$]

NB: Die Punkte mit $x=z=-y$ auf M haben $x^2+x^2+2x^2=2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ergebnis: Im Punkt $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,-1,1)$ hat h das Maximum $2\sqrt{2}$ auf M,

im Punkt $\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1,1,-1)$ das Minimum $-2\sqrt{2}$.

$\square$

Aufgabe 36

(a) <u>Vor.:</u> $f: U \to \mathbb{R}^2$ stetig diff'bar, $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ (die offene Kreisscheibe).

<u>Beh.:</u> f hat ein Potential φ (d.h. $\exists\, \varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f = \operatorname{grad} \varphi$)

$\iff \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$. (Das ist also ein Kriterium dafür, dass f ein Potential hat.)

<u>Bem.:</u> Was bei [F] in Bsp. (10.2), S. 122f. ausgeführt ist für bel. Vektorfelder des $\mathbb{R}^n$, soll in dieser Aufgabe im Fall $\mathbb{R}^2$ nachvollzogen werden. Der dortige Ansatz $\varphi(x,y) := x \cdot \int_0^1 f_1(tx,ty)\,dt + y \cdot \int_0^1 f_2(tx,ty)\,dy$ klappt <u>auch</u>!

<u>Bew.:</u> „$\Rightarrow$": Sei φ Potential von f, d.h. $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1$ und $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2$.

(Haben $f = (f_1, f_2)$, die f_1, f_2 sind die Komponentenfunktionen von f.)

Da f stetig diff'bar, ist also $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ stetig diff'bar, also ex. $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ und ist stetig. Nach dem Satz von Schwarz ex. dann auch $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$, und wir haben $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}$. ✓

„$\Leftarrow$": Sei $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$. Ansatz: $\varphi(x,y) := \int_0^x f_1(\xi, 0)\,d\xi + \int_0^y f_2(x,\eta)\,d\eta$.

Nach dem Satz 2 vom parameterabhängigen Integral berechnen wir nun $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x f_1(\xi,0)\,d\xi + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y f_2(x,\eta)\,d\eta$$

(machbar, da $\frac{\partial f_i}{\partial x}(\xi,\eta)$ stetig, denn f stetig diff'bar! Und weil U beschränkt!)

HS = "Hauptsatz der Diff.- u. $\int$-Rg."

$$= \underbrace{f_1(x,0)}_{\text{wg. HS, nicht Satz 2}} + \underbrace{\int_0^y \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,\eta)\,d\eta}_{\text{wg. Satz 2}} \underset{\text{nach Vor.}}{=} f_1(x,0) + \int_0^y \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,\eta)\,d\eta$$

$$= f_1(x,0) + f_1(x,y) - f_1(x,0) = f_1(x,y)$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\int_0^x f_1(\xi,0)\,d\xi}_{\text{"unabh. von y"}} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y f_2(x,\eta)\,d\eta = 0 + \underbrace{f_2(x,y)}_{\text{wg. HS, nicht Satz 2}} = f_2(x,y),$$

also ist φ ein Potential von f. $\square$

(b) <u>Vor.:</u> Sei $f(x,y) := \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$, def. auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
<u>Beh.:</u> f erfüllt das Kriterium $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ in (a), besitzt aber kein Potential auf U.

<u>Bew.:</u> • Es gilt: $f_1(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $f_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, die partiellen Ableitungen von f_1 nach y und f_2 nach x sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

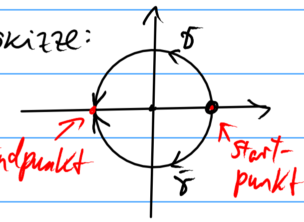
In der Tat gilt also $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$, d.h. das Kriterium in (a) ist erfüllt.

• Wähle die folgenden Wege γ und $\tilde\gamma$ auf U, also $\gamma, \tilde\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$\gamma(t) := (\cos(\pi t), \sin(\pi t)),$$
$$\tilde\gamma(t) := (\cos(\pi t), -\sin(\pi t)),$$

insb. $\gamma(0) = \tilde\gamma(0) = (1,0)$ und $\gamma(1) = \tilde\gamma(1) = (-1,0)$.

Skizze:



$\gamma, \tilde\gamma$ umrunden die Singularität bei $(x,y)=(0,0)$

Dann gilt nach Aufgabe 23, falls f ein Potential φ hätte:

$$\varphi(-1,0) - \varphi(1,0) = \int_0^1 \left(f_1(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\cdot\gamma_2'(t)\right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{-\sin(\pi t)}{\cos^2(\pi t)+\sin^2(\pi t)}\left(-\pi\sin(\pi t)\right) + \frac{\cos(\pi t)}{\cos^2(\pi t)+\sin^2(\pi t)}\cdot\pi\cos(\pi t)\right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(\pi\sin^2(\pi t) + \pi\cos^2(\pi t)\right) dt = \int_0^1 \pi\, dt = \underline{\underline{\pi}},$$

sowie:

$$\varphi(-1,0) - \varphi(1,0) = \int_0^1 \left(f_1(\tilde\gamma(t))\cdot\tilde\gamma_1'(t) + f_2(\tilde\gamma(t))\cdot\tilde\gamma_2'(t)\right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{\sin(\pi t)}{\cos^2(\pi t)+\sin^2(\pi t)}\left(-\pi\sin(\pi t)\right) + \frac{\cos(\pi t)}{\cos^2(\pi t)+\sin^2(\pi t)}\cdot\left(-\pi\cos(\pi t)\right)\right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(-\pi\sin^2(\pi t) - \pi\cos^2(\pi t)\right) dt = \int_0^1 -\pi\, dt = \underline{\underline{-\pi}}, \quad ↯.$$

Also hat f (doch) kein Potential φ auf U. □