Nachtrag zu Aufgabe 33 (a)

Haben $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + xy + y^2$, $Q := [0,1]^2$.
Die Bestimmung der Extrema von f auf ∂Q war in den Hinweisen fehlerhaft argumentiert: denn die Teilmengen $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
und $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1-x)(1-y) = 0\}$
sind keine UMF, vergleiche auch Aufg. (c)!
Wenn wir Satz 4 im Kap. 9 [F] anwenden möchten, ist dies aber Vor.
(es gibt Versionen des Satzes zu Extrema mit NB, die ohne der Vor. "UMF" auskommen, aber das nur als Anmerkung).
Um unsere Überlegung so zu berichtigen, daß Satz 4 Kap. 9 [F] angewendet werden kann, untersuchen wir die einzelnen Teilstrecken von ∂Q getrennt,
also $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$, $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$,
$M_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 1 = 0\}$, $M_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 1 = 0\}$, alles UMF ✓

- Extrema auf $M_1 \cap Q$: Bestimme (x,y) und λ so, daß $\operatorname{grad} f(a) = \lambda \underbrace{\operatorname{grad} g_1(a)}_{(1,0)}$
  $\Leftrightarrow (2x+y, x+2y) = \lambda \cdot (1,0)$ $\rightsquigarrow$ also ist $x = -2y$, wenn $g_1(x,y) = x$
  $(x,y) \in M_1$ mit $x = -2y$ ist nur $(x,y) = (0,0)$,
  der Punkt wurde schon als globale Minimalstelle erkannt.
- Extrema auf $M_3 \cap Q$: Derselbe Ansatz (mit $g_2(x,y) = x - 1$) führt wieder auf $x = -2y$,
  $(x,y) \in M_3$ so ist nur $(1, -\frac{1}{2})$, liegt nicht auf Q.
  Die Extrema von f liegen auf dem Rand von $M_3 \cap Q$, also auf $(0,1)$ und $(1,1)$.
  Haben $f(0,1) = 1$, $f(1,1) = 3 > 1$. Also ist bei $(1,1)$ das Maximum von f auf $M_3 \cap Q$
- Extrema auf $M_2 \cap Q$: Bestimme (x,y), λ so, daß $\operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} g_3(a)$
  $\Leftrightarrow (2x+y, x+2y) = \lambda \cdot (0,1)$ $\rightsquigarrow$ also $2x = -y$,
  $(x,y) \in M_2$ so ist nur $(0,0)$, s.o.
- Extrema auf $M_4 \cap Q$: Wieder erhalten wir $2x = -y$, mit $(x,y) \in M_4$ folgt
  $(x,y) = (-\frac{1}{2}, 1) \notin Q$. Jetzt wie für $M_3 \cap Q$ schließen:
  $f(1,0) = 1$, $f(1,1) = 3 > 1$, wobei wiederum bei $(1,1)$ das Max. von f auf $M_4 \cap Q$ ist.

Dies alles, zusammen mit der Überlegung zu $\mathring{Q}$, die Beh. $\square$

Nachtrag zur letzten Aufgabe 36 a):

Alternativer Ansatz + Lösung in „$\Leftarrow$":

Setze $\varphi(x,y) := x\int_0^1 f_1(tx,ty)\,dt + y\int_0^1 f_2(tx,ty)\,dt$, dann gilt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) \overset{\text{Satz vom Parameter-}\int}{=} x\int_0^1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f_1(tx,ty)}_{=t\cdot D_1 f_1(tx,ty)}dt + \int_0^1 f_1(tx,ty)\,dt + y\int_0^1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f_2(tx,ty)}_{=t\cdot D_1 f_2(tx,ty)}dt$$

$$= \int_0^1 \Big(t\cdot\big(x D_1 f_1(tx,ty) + y \underbrace{D_1 f_2}_{=D_2 f_1 \text{ nach Vor.}}(tx,ty)\big) + f_1(tx,ty)\Big)\,dt$$

$$\overset{\circledast}{=} \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(t f_1(tx,ty)\big)\,dt = t f_1(tx,ty)\Big|_0^1 = f_1(x,y),$$

analog: $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y)$. ✓

Zu $\circledast$: $\frac{d}{dt}\big(t f_1(tx,ty)\big) \overset{\text{Produktregel}}{=} f_1(tx,ty) + t\cdot\frac{d}{dt} f_1(tx,ty)$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} f_1(tx,ty) + t\cdot\big(D_1 f_1(tx,ty)\cdot x + D_2 f_1(tx,ty)\cdot y\big),$$

ebenso mit f_2.