Nachtrag zu den Lösungen:

Korrektur/Ergänzung zu
Blatt 1, Aufg. 1) d):

$$f(x) = \frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1},$$ gesucht: Taylorreihe in $a=1$.

Wir haben mit $g(x) := (x-2)^{-1}$ und $h(x) := (x+1)^{-1}$

die Ableitungen $g^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(x-2)^{-n-1}$, also $g^{(n)}(1) = (-1)^n n! \cdot (-1)^{-n-1}$
$= -n!$,

und $h^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(x+1)^{-n-1}$, also $h^{(n)}(1) = (-1)^n n! \cdot 2^{-n-1}$
$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n n!$.

Die Taylorreihe ist dann $$-3\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot(x-1)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 3\right)\cdot(x-1)^n}}$$

Konvergenz IV der Taylorreihe: $]0,2[$,
denn:
Kgz. radiusbestimmung: haben $$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 3\right|} = \limsup_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[n]{3+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0}}}_{\to 1} = 1,$$

also Kgz. für $x-1 \in\,]-1,1[$, d.h. $\underline{\underline{x\in\,]0,2[}}$.

Verhalten an den Randpunkten $x=0$: Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 3\right)\cdot(-1)^n$ divergiert, da Glieder keine Nullfolge,

$x=2$: Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 3\right)\cdot 1$ divergiert, da Glieder keine Nullfolge.

□

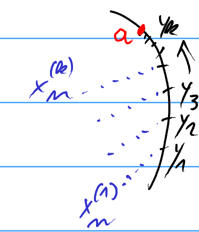
Korrektur zu

Blatt 2, Aufgabe 8) a):

Haben $\overline{M} := \{a \in X \mid \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $M: x_k \xrightarrow{k\to\infty} a\}$,

insb.: $M \subseteq \overline{M}$, da für $a\in M$ die Konstante Folge $x_k := a \xrightarrow{k\to\infty} a$.

(a) Beh.: $\overline{M}$ ist abgeschlossen.



Bew.: Zeigen Kriterium von Satz 0.5, d.h.:

Beh.: $\forall (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\overline{M}$, $y_k \xrightarrow{k\to\infty} a \in X \Rightarrow a \in \overline{M}$.

Sei dazu $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\overline{M}$ mit $y_k \xrightarrow{k\to\infty} a\in X$ gewählt.

Laut Def. von $\overline{M}$ gibt es für jedes $y_k\in\overline{M}$ eine Folge $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $x_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} y_k$.

Für k fest wähle $x_{n_k}^{(k)}$ so (d.h. n_k so groß), daß $|x_n^{(k)} - y_k| < \frac{1}{k}$.

Für $\varepsilon>0$ wähle k_0 so groß, daß $|y_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k\ge k_0$

und k_1 so groß, daß $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k\ge k_1$, (etwa $k_1 := \lceil \frac{2}{\varepsilon}\rceil$)

für alle $k \ge \max\{k_0,k_1\}$ ist dann

$$|x_{n_k}^{(k)} - a| \le |x_n^{(k)} - y_k| + |y_k - a| < \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Somit: $x_{n_k}^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} a$, die $x_{n_k}^{(k)} \in M$.

Wegen Def. von $\overline{M}$ folgt $a\in\overline{M}$. $\square$