Präsenzaufgaben / Einstiegsaufgaben zum impliziten Funktionensatz:

Der implizite Funktionensatz in zwei Variablen:

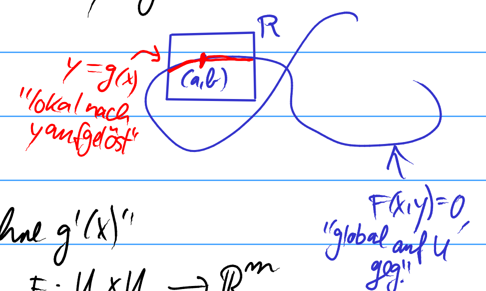
Bei [F]: $U = U_1 \times U_2$

Vor.: Sei $F : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, F stetig diff'bar, $(a,b) \in U$ mit $\underline{F(a,b)=0}$ und $D_2 F(a,b) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

$V_1 = (\alpha,\beta)$, $V_2 = (\gamma,\delta)$

Beh.: Dann gibt es ein offenes Rechteck $R := (\alpha,\beta) \times (\gamma,\delta) \ni (a,b)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : (\alpha,\beta) \to (\gamma,\delta)$, $g(a) = b$, so dass für alle $(x,y) \in R$ gilt: $\big(\underline{F(x,y) = 0 \iff y = g(x)}\big)$.

(Zusatz) **Es gilt:** $g'(x) = -\dfrac{D_1 F(x,y)}{D_2 F(x,y)} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$.



Bem.:
- "lösen $F(x,y)=0$ lokal nach y auf $\rightsquigarrow y = g(x)$, und berechne $g'(x)$"
- Bei [F] ist $U = U_1 \times U_2$, $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$, $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$.
  Der hier aufgeschriebene Spezialfall ist der mit $k = m = 1$.
  Die Vor. "$\frac{\partial F}{\partial y}$ invertierbar" reduziert sich dann zu "$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$".

1. **Beispiel:** Betr. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Für $y > 0$ ist $y = \sqrt{1-x^2}$ die Funktion $y = y(x)$, die durch $F(x,y) = 0$ "implizit" gegeben ist. (im Satz: schreiben $y = g(x)$, gilt "lokal")
   Laut Satz ist ihre Abl. gleich $-\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,
   wir erhalten das Ergebnis direkt durch partielles Ableiten von F, ohne die explizite Funktion $y = y(x)$ ableiten zu müssen!
   Es gibt Beispiele, wo dies zu schwierig wäre.

2. **Beispiel:** ~~Aufgabe~~: Berechnen $\frac{dy}{dx}$ (schreibe: $g'(x)$) für: a) $x^2 + 4y^2 = 1$, b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

3. **Beispiel:** ~~Aufgabe~~: Bestimmen die Gleichung der Tangente der durch $f(x,y) = 0$ gegebenen Kurve im Punkt P:
   a) $f(x,y) = y^2 - x^3$, $P = (1,1)$,   b) $f(x,y) = x^2 + xy - y^3 - 7$, $P = (3,2)$.

Lösung 2. Beispiel:

Zu a): $F(x,y)=0$ mit $F(x,y):=x^2+4y^2-1$, ist stetig diff'bar.

Dann ist $D_2F(x,y)=8y\neq 0$ genau für $y\neq 0$.

Laut Satz:
$$g'(x)=-\frac{D_1F(x,y)}{D_2F(x,y)}=-\frac{2x}{8y} \text{ für } y\neq 0.$$

Für $x=\frac{1}{2}$ und $y=\frac{\sqrt{3}}{4}$ dann: $g'(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$,

Für $x=\frac{1}{2}$ und $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ dann: $g'(\frac{1}{2})=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Beachten: "$g(x)$" ist nicht überall dieselbe Funktion! Und auch $y(x)$ wäre eine verwirrende Notation!

Zu b): $F(x,y)=0$ mit $F(x,y):=\sqrt{x}+\sqrt{y}-1$, ist stetig diff'bar für $x\neq 0\neq y$.

Dann ist $D_2F(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\neq 0$,

Laut Satz:
$$g'(x)=-\frac{D_1F(x,y)}{D_2F(x,y)}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$$

Für $x=\frac{1}{4}$ und $y=\frac{1}{4}$ dann: $g'(\frac{1}{4})=-\frac{1/2}{1/2}=-1$.

Lösung 3. Beispiel:

Zu a): Geg. $f(x,y)=y^2-x^3$, $P=(1,1)$. Haben: f ist stetig diff'bar,

$D_1f(x,y)=-3x^2$ und $D_2f(x,y)=2y$ ($\neq 0$ genau für $y\neq 0$).

Laut Satz:

Abl. in P: $g'(1)=-\frac{D_1f(P)}{D_2f(P)}=-\frac{-3\cdot 1^2}{2\cdot 1}=\frac{3}{2}$,

Tangentenglg. in P: $y=\frac{3}{2}x+c$, wo $1\overset{!}{=}\frac{3}{2}\cdot 1+c$, d.h. $c=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$,

also: $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

Zu b): Geg. $f(x,y)=x^2+xy-y^3-7$, $P=(3,2)$. Haben: f ist stetig diff'bar,

$D_1f(x,y)=2x+y$ und $D_2f(x,y)=x-3y^2$ ($\neq 0$ genau für $\underbrace{x\neq 3y^2}_{\text{ok für } P:\ 3\neq 3\cdot 2^2 \checkmark}$).

Laut Satz:

Abl. in P: $g'(3)=-\frac{D_1f(P)}{D_2f(P)}=-\frac{2\cdot 3+2}{3-3\cdot 4}=\frac{8}{9}$,

Tangentengl. in P: $y=\frac{8}{9}x+c$, wo $2\overset{!}{=}\frac{8}{9}\cdot 3+c$, d.h. $c=\frac{18}{9}-\frac{3\cdot 8}{9}=\frac{-2}{3}$,

also: $y=\frac{8}{9}x-\frac{2}{3}$.