Analysis 2 – gemischte Probeaufgaben

(1) Eine Teilmenge eines metrischen Raumes, die Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist, ist

☒ offen ☐ ein Ball ☐ abgeschlossen ☐ eine Menge aus Randpunkten

(2) Die Menge ∂M der Randpunkte einer Teilmenge M eines metrischen Raumes ist stets

☐ kompakt ☐ beschränkt ☒ abgeschlossen ☐ Häufungspunkt

(3) Die Bogenlänge einer stetig differenzierbaren Kurve $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ ist

☐ stets eine rationale Zahl ☒ abhängig von der Wahl der Norm
☐ möglicherweise negativ ☐ möglicherweise unendlich

(4) Unter stetigen Abbildungen sind Urbilder offener Mengen stets

☐ abgeschlossen ☐ zusammenhängend ☐ konvex ☒ offen

(5) Der Satz von Heine-Borel gilt in

☐ allen vollständigen normierten Räumen ☒ in jedem $\mathbb{R}^n$
☐ allen metrischen Räumen ☐ in allen vollständigen metrischen Räumen

(6) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt der Taylorsche Satz in beliebigen

☒ konvexen offenen ☐ offenen ☐ beschränkten ☐ kompakten

Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

(7) Das Polynom

☐ x^3y ☒ $y^3 + x(xy^2 - x^2) - x^2y^2$ ☐ $x + y + xy$ ☐ $1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3$

ist homogen vom Grad 3.

(8) Die Hessematrix kann von einer beliebigen

☐ stetig differenzierbaren ☐ differenzierbaren
☒ zweimal partiell differenzierbaren ☐ partiell differenzierbaren

Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gebildet werden.

(9) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $a \in \mathbb{R}^n$, falls f in a

☐ partiell differenzierbar ist ☒ stetig differenzierbar ist
☐ in allen Richtungen differenzierbar ist ☐ stetig ist

(10) Die Ableitungsmatrix einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stets

☐ eine $n \times 1$-Matrix ☒ der Gradient von f ☐ invertierbar ☐ symmetrisch

Fortsetzung: Analysis 2 – gemischte Probeaufgaben

(11) Die Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

☐ $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ ☐ $f(x) = 2x$ ☐ $f(x) = \sqrt{x}$ ☒ $f(x) = \frac{x}{2}$

ist eine Kontraktion.

(12) Die Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

☒ $f(x) = x^2$ ☐ $f(x) = 2x+2$ ☐ $f(x) = -x^2+\sqrt{x}+2$ ☐ $f(x) = x - \frac{2}{x}$

hat mindestens einen Fixpunkt.

(13) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (x^2+y^2, x^2-y^2)$, ist lokal umkehrbar in allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit

☒ $xy \neq 0$ ☐ $(x,y) \neq (0,0)$ ☐ $x \neq 0$ ☐ $y \neq 0$

(14) Die lokale Umkehrbarkeit einer in einem Punkt stetig differenzierbaren Funktion lässt sich dort stets mit Hilfe der

☐ Hessematrix ☒ Funktionalmatrix ☐ inversen Matrix der Hessematrix

☐ transponierten Matrix der Hessematrix

bestimmen.

(15) Im Punkt

☐ $(0,0)$ ☐ $(-\sqrt{2},0)$ ☐ $(\sqrt{2},0)$ ☒ $(1, \sqrt{\sqrt{5}-2})$

kann durch $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ (Lemniskate) mit dem impliziten Funktionensatz lokal eine Kurve $y = y(x)$ definiert werden.

(16) Ist die Abbildung $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$, T offenes Intervall in $\mathbb{R}$, eine Immersion, so ist

☒ φ eine nicht-singuläre Kurve ☐ φ eine rektifizierbare Kurve ☐ $n = 1$

☐ der Rang der Funktionalmatrix überall gleich n

(17) Ist $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ stetig und stetig differenzierbar in y, dann hat die Funktion $\varphi(x) := \int_0^1 f(x,t)dt$ an der Stelle $x = 0$ die Ableitung

☐ $\int_0^1 D_1 f(x,t)dt$ ☐ $\int_0^1 D_2 f(x,t)dt$ ☒ $\int_0^1 D_1 f(0,t)dt$ ☐ $\int_0^1 D_2 f(0,t)dt$

(18) Es gilt

☐ $x^2 = o(\|x\|^2)$ ☐ $x = o(\|x\|^3)$ ☒ $4x^3y^2 = o(\|xy\|^2)$ ☐ $x+y+2xy = o(\|xy\|^2)$

für $(x,y) \to 0$.

(19) Die Ableitung der Funktion $f(x,y) = x^2y + y$, $x = x(t) = \sin(t)$, $y = y(t) = 1 + t\cos(t)$, nach t in $t = 0$ ist gleich

☐ -1 ☒ 1 ☐ π ☐ 0

(20) Die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y) = x + 2yx^2$ im Punkt $(0,0)$ und in Richtung $v = (1,2)$

☐ ist gleich $(1+4xy, 2x^2)$ ☐ existiert nicht

☒ ist das Negative der Richtungsableitung in Richtung $-v$ ☐ ist gleich 2