Repetitoriumsstunde Analysis 2

Themen:
1. Topologie-Grundlagen: metrische Räume, offene Teilmengen usw.
2. Kurven und Rektifizierbarkeit
3. Mehrdimensionales Ableiten
4. Taylorsche Formel
5. Lokale Extrema (auch mit NB)
6. impliziter Funktionensatz & Lokale Umkehrbarkeit
7. UMF & Immersionen (Definitionen...)
8. Parameterabhängige Integrale

① Topologie-Grundlagen

- normierter Raum $\overset{\circledast}{\Rightarrow}$ metrischer Raum $\Rightarrow$ topologischer Raum
- normierter Vektorraum: $(V, \|\cdot\|)$, V ein $\mathbb{R}$-VR, $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, mit: $\forall_{\substack{v,w\in V,\\ \alpha\in\mathbb{R}}}$:
  $\|v\|=0 \Leftrightarrow v=0$, $\|\alpha v\| = |\alpha|\cdot\|v\|$, $\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$
- metrischer Raum: (X,d), X eine Menge, $d: X\times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, mit: $\forall x,y,z \in X$:
  $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$, $d(x,y)=d(y,x)$, $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

  Normen im $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p}$, $p \geq 1$, $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

  [Zu ⊛: $(V, \|\cdot\|)$ normierter VR $\Rightarrow d(x,y) := \|x-y\|$ ist Metrik auf V]

  $\rightsquigarrow$ Kgz.begriff in metrischen / normierten Räumen

  " in Produkträumen: Komponentenweise

  $\rightsquigarrow$ insb. im $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, egal welche Norm auf $\mathbb{R}^n$!

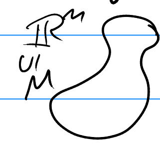
  $\rightsquigarrow$ Stetigkeitsbegriff zwischen metrischen Räumen
  (Folgenstetigkeit $\Leftrightarrow$ ε-δ-Stetigkeit)
- metrische Räume sind hausdorffsch
- (X,d) vollständig: jede Cauchyfolge konvergiert (z.B. kompakte metr. Räume)
- offen / abg. / Kugeln / Umgebungen / beschränkt / kp. • $\{x_k \mid k\in\mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kp, falls $x_k \to a$
- kompakt $\Rightarrow$ abg. & beschr., i.a. nicht „$\Leftarrow$"! (vgl. Bsp. [F])

- K kp., $A \subseteq K$, A abg. $\Rightarrow$ A kp. • A abg., K kp., $A \cap K = \emptyset \Rightarrow \operatorname{dist}(A,K) > 0$
- Heine-Borel: $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann: K kp. $\Leftrightarrow$ K beschr. & abg.
- Stetige Abb. bilden kp. Mengen auf kp. Mengen ab!
- Urbilder $\left\{\begin{matrix}\text{offener}\\ \text{abg.}\end{matrix}\right\}$ Mengen unter stetigen Abb. sind $\left\{\begin{matrix}\text{offen}\\ \text{abg.}\end{matrix}\right\}$ ($\rightsquigarrow$ ist Def. von Stetigkeit in top. Räumen)
- Banachscher Fixpunktsatz: Sei $(V, \|\cdot\|)$ vollst. normierter Vektorraum, $A \subseteq V$ abg., $\Phi: A \to A$ Kontraktion, d.h. $\exists \theta,\ 0 < \theta < 1,\ \forall x,y \in A: \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \le \|x-y\| \cdot \theta$
  Dann ex. genau ein $a \in A$ mit $\Phi(a) = a$, d.h. ein Fixpunkt von Φ.

Beispiele:
- vollst. norm. Raum: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $\|\cdot\|$ bel. Norm auf $\mathbb{R}^n$
- nicht vollst. Raum: $C([a,b])$ mit $\|f\| := \int_a^b |f(x)|\,dx$

- Schachtelungsprinzip

in Übungen:
- Schnitt endl. vieler offener Mengen ist offen
- Vereinigung endl. vieler abg. Mengen ist abg.
- Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen
- Schnitt beliebig vieler abg. Mengen ist abg.
- Rand, Abschluss, innere Punkte:
  Def. von ∂M, $\overline{M}$, $\mathring{M}$ usw.



- Beispiele für Banachschen Fixpunktsatz

Aufgaben:
- Beweisen Sie, dass die Abb. $T(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ in $[1,4]$ einen Fixpunkt hat.
- Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen für alle $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig?

$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 2\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \le f(x) \le 2\}$,

$M_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$, $M_4 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 < f(x) \le 2\}$

② Kurven und Rektifizierbarkeit

- Kurve: stetige Abb. $f: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein IV

$\rightsquigarrow$ Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_n$: $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$

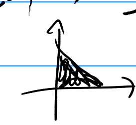
$[f_i := pr_i \circ f, \quad pr_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i]$

- f (st.) db $\iff$ alle f_i (st.) db.
- f db $\rightsquigarrow$ $f'(t) := (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$ heißt Tangentialvektor von f in t bzw. von f im Punkt $(t, f(t))$
- Rektifizierbarkeit: $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ st., $a < b$, rekt'bar $:\iff \exists L > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta: \forall$ Untert. $a = t_0 < \dots < t_k = b$, mit Feinh. δ: $\left| \sum_{1 \le i \le k} \| f(t_i) - f(t_{i-1}) \| - L \right| < \varepsilon$

- f stetig db $\Rightarrow$ f rekt'bar und Länge berechenbar mit der:
- Bogenlängenformel: $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ st. db $\Rightarrow$ $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$

- f ist nicht rektifizierbar, wenn $\forall L > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists$ Unterteilung mit Feinheit $< \delta$: $\sum_{i=1}^{k} \| f(t_i) - f(t_{i-1}) \| \ge L$.

in Übungen:
- es gibt surjektive Kurven $[0,1] \to \Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0}, x + y \le 1\}$
- diff'bare Kurven, die nicht rekt'bar sind
- Bogenlänge abh. von Wahl der Norm
- Bogenlänge auch numerisch berechenbar mit Bogenlängenformel + Taylorsatz



Aufgaben: Tangente an Kurve $g(t) := (t - \cos t, 3 + \sin 2t, 1 + \cos 3t)$ im Punkt $g(\frac{\pi}{2})$?

Kurvenlänge für $t \in [0,1]$? (geht mindestens numerisch)

③ Mehrdimensionales Ableiten

Funktionen $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ($n=m$: "Vektorfeld")

Fall $n=1$: s. Kurven: Ableiten geht "Komponentenweise"

Fall $m=1, n>1$: "Skalarfeld"

$\rightsquigarrow$ Richtungsabl., partielle Abl., totale Abl.

Richtungsabl.: $\|v\|=1 \Rightarrow D_v f(x) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+hv)-f(x))$

partielle Abl.: $D_i g(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) := D_{e_i} g(x)$

stetig partiell db = alle partiellen Abl. st.

alle Richtungsabl. ex. $\Rightarrow$ partiell db $\not\Rightarrow$ stetig, total db $\Rightarrow$ stetig $\not\Rightarrow$ partiell db

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{grad} f(x) := (D_1 f(x), \dots, D_n f(x)) \in \mathbb{R}^{1\times n}$

Linearisieren von Funktionen

- totale Abl.: f in a db $\Leftrightarrow \exists A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m): f(a+\xi) = f(a) + A\cdot\xi + o(\|\xi\|)$,

d.h. $\lim_{\xi\to 0} \frac{1}{\|\xi\|}\cdot(f(a+\xi)-f(a)-A\cdot\xi) = 0$ bzw. $\lim_{x\to a}(\dots) = 0$

- $f=(f_1,\dots,f_m)$ in a db $\Leftrightarrow$ alle f_i db in a $\rightsquigarrow A = (D_j f_i(x))_{ij}$
- $D_v f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle = Df(x)\cdot v$
- in der Def. der totalen Abl. ist $\|\cdot\|$ irgendeine Norm des $\mathbb{R}^n$, man kann etwa $\|\xi\| := \|\xi\|_\infty$ oder $\|\xi\| := \|\xi\|_2$ nehmen. Daher ist $\xi\to 0$ identisch mit $\|\xi\|\to 0$.
- $\varphi(x) = o(\|x\|) :\Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{\|x\|} \xrightarrow{x\to 0} 0$

in Übungen:
- Stetigkeit bei Skalarfeldern
- Ableitungen "sind" Matrizen
- partielle, Richtungsabl. ausrechnen
- ex. unstetige Fkt., die in allen Richtungen db sind (Aufg. 14)
- S. v. Schwarz gilt nicht, wenn Fkt. nicht 2x stetig db ist (Aufg. 15)
- Kettenregel
- db, aber nicht stetig db (Aufg. 18)
- grad, div, rot, Δ ausrechnen
- Gradientenfeld: $v = \operatorname{grad} f \rightsquigarrow f$ Potential, Kurvenintegral
- totale Ableitung / Diff'barkeit
- $f'(x) = 0\ \forall x\in U \Rightarrow f$ konstant, für zush. U

  f kann auf versch. Zusammenhangskomp. aber verschiedene Werte annehmen

<u>Aufgaben:</u> • Berechnen/Existenztest von Richtungsableitungen, partiellen und totalen Ableitungen
• Einsatz der Kettenregel

<u>Beispiele/Aufgaben:</u>

• Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, partiell db + unstetig:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

ist partiell db, aber unstetig

• Untersuchen Sie auf Differenzierbarkeit + Partielle Diff'barkeit:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x+y}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

• Gegeben seien die Funktionen $F, G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$F(u,v) = 3u^2 - uv$, $\quad G(u,v) = 2uv^2 + v^3$
Berechnen Sie $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$, $DF(u,v)$, $DG(u,v)$.

Was wenn $u = u(t)$, $v = v(t)$, etwa $u = 2t$, $v = e^t$,
was ist dann $\frac{dF}{dt}(t) = ?$ $\rightsquigarrow$ Kettenregel

④ <u>Taylorsche Formel</u>

(gilt insb., wenn U offen & konvex)

• <u>Taylor-Satz/-Formel:</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0,1]: x + t\xi \in U$.
Sei $f: U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal st. db. Dann ex. $\theta \in [0,1]$:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha,$$

• Summation über $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$,

$$\underbrace{x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}}_{\text{Monom vom Grad } |\alpha| \in \mathbb{N}_0}, \quad D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} f$$

• x ist der Entwicklungspunkt der Taylorentwicklung.

• Alternative Version der Formel, wenn der Entwicklungspunkt $a \in U$ heißt:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha}_{\text{Taylorpolynom in } a \text{ vom Grad} \le k} + \sum_{|\alpha| = k} \frac{D^\alpha f(a+\theta(x-a))}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha,$$

für alle x mit $\forall t \in [0,1]: a + t\cdot(x-a) \in U$, d.h. $\underbrace{\mathrm{str}(a,x)}_{\text{Strecke, die } a \text{ mit } x \text{ verbindet}} \subseteq U$

• <u>Monom</u> = irgendein Produkt aus Unbestimmten

• Grad eines Polynoms P = höchster Grad eines Monoms <u>in P</u>, das vorkommt

• P homogen: alle Monome in P haben denselben Grad

<u>Bsp.:</u> x^2y ist Monom vom Grad 3, $x^2 + xy^2$ ist Pol. vom Grad 3, kein Monom,
$xy^2 + x^2y - x^3$ ist homogenes Pol. vom Grad 3, da alle Monome darin Grad 3 haben

<u>Aufgabe:</u> Taylorpolynombestimmung: Bestimmung des Taylorpol. vom Grad ≤ 1 von $f(x,y,z) = y\sin x - xy^2 - x^2z$ in $a = (1, \pi, 0)$?
($\to$ Entwickeln in Potenzen von $(x-1)$, $(y-\pi)$, z)

$D_1 f(x,y,z) = y\cos x - y^2 - 2xz$, $D_2 f(x,y,z) = \sin x - 2xy$
$D_3 f(x,y,z) = -x^2$

$$\rightsquigarrow \underbrace{f(1,\pi,0)}_{= \dots} + \underbrace{D_1 f(1,\pi,0)}_{\pi\cos(1) - 1} \cdot (x-1) + \underbrace{D_2 f(1,\pi,0)}_{\sin(1) - 2\pi} \cdot (y-\pi) + \underbrace{D_3 f(1,\pi,0)}_{-1} \cdot z$$

(5) Lokale Extrema (auch mit NB)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig db.

- f hat in $a \in U$ ein lokales Extremum, falls f in a ein lokales Maximum oder lokales Minimum hat.
- f hat in $a \in U$ ein lokales $\begin{Bmatrix}\text{Max.}\\ \text{Min.}\end{Bmatrix}$, falls $\exists$ Umgebung $V \subseteq U$ von a: $f(x) \begin{Bmatrix}\le f(a)\\ \ge f(a)\end{Bmatrix}$ für alle $x \in V$

Hessematrix: $(\operatorname{Hess} f)(x) := (D_i D_j f(x))_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symmetrisch (Schwarz)

- Notw. Bed.: f in x lokales Extremum $\Rightarrow \operatorname{grad} f(x) = 0$, d.h. x ist kritische Stelle

Hinr. Bed.: x kritisch, $\operatorname{Hess} f(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{pos.}\\ \text{neg.}\end{Bmatrix}$ definit $\Rightarrow f$ hat in x striktes lokales $\begin{Bmatrix}\text{Min.}\\ \text{Max.}\end{Bmatrix}$

x kritisch, $\operatorname{Hess} f(x)$ indef. $\Rightarrow f$ kein lokales Extremum in x
[semidef. reicht nicht!]

Bsp.: $f(x,y) = y^2 + x^4 + x^3 \rightsquigarrow D_2 D_1 f(x,y) = 0$, $D_1^2 f(x,y) = 6x(2x+1)$, $D_2^2 f(x,y) = 2$

$\rightsquigarrow H(f;0) = \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$ pos. semidef., $H(f;(-\frac{3}{4},0)) = \begin{pmatrix}+&0\\0&2\end{pmatrix}$ pos. def.

$\rightsquigarrow$ in $(-\frac{3}{4},0)$ ex. striktes lokales Min., aber kein Extremum in 0: Denn:

$$f(x,0) = x^3(x+1) \begin{cases} <0 = f(0), & \text{falls } -1<x<0 \\ >0 = f(0), & x>0 \end{cases}$$

- Extrema mit NB: Seien $f, g_1, \dots, g_r$ $U \to \mathbb{R}$ st. db., $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sprechweise: f hat lokales Extremum in $a \in U$ mit Nebenbed. $g_1(a) = \dots = g_r(a) = 0$, falls $f|_M$ ein lokales Extremum in a hat, wobei $M := \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

$\rightsquigarrow$ Bestimmung mit Lagrange-Multiplikatormethode (vgl. Satz 4 Kap 9 [F]), Ansatz:

$\operatorname{grad} f(x) = \lambda_1 \operatorname{grad} g_1(x) + \dots + \lambda_r \operatorname{grad} g_r(x)$

liefert die kritischen Punkte [Vor.: $\operatorname{rg} \frac{\partial(g_1, \dots, g_r)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) = r \ \forall x \in M$]

Aufgabe: • Aufg. (9.6) bei [F]!

• Extremwerte von z auf der Oberfläche $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35$?

(Ergebnis: Max. $= 5$, Min. $= -5$) $\rightsquigarrow f(x,y,z) = z$, $g(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 35$

⑥ Impliziter Funktionensatz und lokale Umkehrbarkeit:

Vgl. Zentralübung "Hinweise zu Blatt 8"

Aufgabe: $0 = F(x,y,z) = x^2 z + y z^2 + 2xy^2 - z^3 + z$, wo gilt: $z = g(x,y)$? Abl. dort?

⇝ betr. $F(x_1,x_2,y) := x_1^2 y + x_2 y^2 + 2x_1x_2^2 - y^3 + y$

eine Nullstelle ist $(0,0,0) =: a$.

Weiter $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y) = x_1^2 + x_2 - 3y^2 + 1$, also $\frac{\partial F}{\partial y}(a) = 1 \neq 0$,

also ex. nahe $(0,0)$ eine Fkt. g mit $g(0,0)=0$ und $g(x_1,x_2)=y \Leftrightarrow F(x_1,x_2,y)=0$.

Diese ist st. db, und wir haben

$$g'(0,0) = -1\cdot(0,0) = (0,0),$$

denn $\frac{\partial F}{\partial(x_1,x_2)}(x_1,x_2,y) = (2x_1 + 2x_2^2, y^2 + 4x_1x_2)$.

⑦ UMF und Immersionen

Def. Immersion: Sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$. Eine stetig diff'bare Abb. $\varphi: T \to \mathbb{R}^n$ heißt Immersion, falls $\forall t \in T$: Rang $D\varphi(t) = k$.

(Es folgt $n \geq k$)

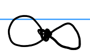
(Dann: $\forall t \in T$ $\exists$ Umg. $V \subseteq T$ von t: $\varphi|_V : V \to \varphi(V)$ ist injektiv und ein Homöomorphismus.)

(Ist Verallg. einer nichtsing. Kurve ($k=1$).)

Def. UMF: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale UMF von $\mathbb{R}^n$, falls $\forall a \in \mathbb{R}^n$ $\exists$ offene Umg. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a $\exists$ $T \subseteq \mathbb{R}^k$ $\exists$ Immersion $\varphi: T \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(T) = M \cap U$

Bsp.: Lemniskate "∞" ist keine UMF!

Alternative Def. vgl. Satz 2 in Kap 9 [F], anschaulich: in jedem Punkt $a \in M$ sieht M (lokal gesehen) so aus wie eine k-dimensionale Ebene, d.h. ist dazu diffeomorph (nach Einschränken auf Umgebungen).



8) Parameterabhängige Integrale

Satz 1: Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a<b$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f:[a,b]\times U \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $\varphi: U \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$, stetig.

Satz 2: Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle, $f: I\times J \to \mathbb{R}$ stetig und nach y stetig diff'bar, d.h. $\forall x \in I: f(x,\cdot): J \to \mathbb{R}, y \mapsto f(x,y)$, stetig db.,
d.h. $\forall x \in I\ \forall y \in J: \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ex. und ist stetig in y.

Dann ist $\varphi: J \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) := \int_I f(x,y)\,dx$ stetig db

und es ist $\dfrac{d\varphi}{dy} = \displaystyle\int_I \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$.

Bsp.: $\varphi(\alpha) := \int_0^1 \cos(\alpha x)\,dx$, haben $f(x,\alpha) := \cos(\alpha x)$,
stetig auf $[0,1] \times \underbrace{[\tfrac{1}{2}, 4]}_{\text{für Satz, jedes andere kp. I geht auch}}$,

f ist dort auch stetig diff'bar nach y.

Dann:
$$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}(\cos(\alpha x))\,dx = \int_0^1 x\cos(\alpha x)\,dx = \frac{x}{\alpha}\sin\alpha x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)\,dx$$
$u'=1,\ v = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$ usw.

Satz 3 (Satz von Fubini): $f:[a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ stetig
$$\Rightarrow \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$