Zentralübung Analysis 2, Blatt 9

Aufgabe 35

Vor.: Seien $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$f(x,y,z) := x+y+z$, $g(x,y,z) := 2x+3y+2z$,
$h(x,y,z) := x-y+2z$.

(a) Gesucht: Extrema von f auf $S^2 := \{(x,y,z) \mid \|(x,y,z)\|_2 = 1\}$
$= \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2-1=0\}$,
d.h. unter der Nebenbedingung (NB)
$\tilde{g}(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1 \overset{!}{=} 0$

Ansatz mit Lagrangemult. λ:
gesucht $(x,y,z), \lambda$: $\quad \operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \cdot \operatorname{grad} \tilde{g}(x,y,z) \quad \leftarrow$
$\Leftrightarrow (1,1,1) = \lambda \cdot (2x, 2y, 2z)$
$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2x}$, und $x=y=z$ $(\neq 0)$.

NB: Die Punkte der Gestalt (x,x,x) auf S^2 sind,
wegen $3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,
gleich $\frac{1}{3}\sqrt{3}(1,1,1)$, $-\frac{1}{3}\sqrt{3}(1,1,1)$,

Ergebnis: Im Punkt $\frac{1}{3}\sqrt{3}(1,1,1)$ hat f das Maximum $\sqrt{3}$ auf S^2,
im Punkt $-\frac{1}{3}\sqrt{3}(1,1,1)$ hat f das Minimum $-\sqrt{3}$ auf S^2.

(b) Gesucht: Extrema von g auf $E \cap Z$ mit
$E := \{(x,y,z) \mid x+z=1\}$,
$Z := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=2\}$.

Betr. $\tilde{g}_1(x,y,z) := x+z-1$, $\tilde{g}_2(x,y,z) := x^2+y^2-2$.

Ansatz mit Lagrangemult. λ_1 und λ_2:

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = \lambda_1 \operatorname{grad} \hat{g}_1(x,y,z) + \lambda_2 \operatorname{grad} \hat{g}_2(x,y,z)$$

$\Leftrightarrow (2,3,2) = \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(2x,2y,0)$

$\Leftrightarrow x=0,\ y,z$ bel., $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{3}{2y}$

NB: Die Punkte mit $x=0$ auf $E \cap Z$ sind die mit $z=1$ und $y = \pm\sqrt{2}$.

Ergebnis: Im Punkt $(0,\sqrt{2},1)$ hat g das Maximum $3\sqrt{2}+2$ auf $E\cap Z$,
im Punkt $(0,-\sqrt{2},1)$ hat g das Minimum $-3\sqrt{2}+2$.

(c) Gesucht: Extrema von h auf $M := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+2z^2 = 2\}$.
Betr. $\hat{g}_3(x,y,z) := x^2+y^2+2z^2-2$.

Ansatz: $\operatorname{grad} h(x,y,z) = \lambda \cdot \operatorname{grad} \hat{g}_3(x,y,z)$

$\Leftrightarrow (1,-1,2) = \lambda\cdot(2x,2y,4z)$

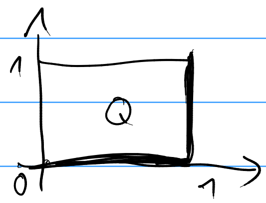
$\underset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow}\ x = \frac{1}{2\lambda},\ y = -\frac{1}{2\lambda},\ z = \frac{1}{2\lambda}$

NB: Die Punkte mit $x=-y=z$ auf M haben $x^2+x^2+2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Ergebnis: Im Punkt $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ hat h das Maximum $2\sqrt{2}$ auf M,
im Punkt $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ hat h das Minimum $-2\sqrt{2}$ auf M.

Zu Aufg. 33: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + xy + y^2$

Extrema auf $Q := [0,1]^2$?



$M = \{(x,y) \mid x \cdot y = 0\}$ Keine UMF!

Ergänzung: $f(x,y) = x + 2yx^2$, $a = (0,0)$, $v = (1,2)$

$\rightsquigarrow \bar{v} := \frac{v}{\|v\|_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$

$$D_{\bar{v}} f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), \bar{v} \rangle$$

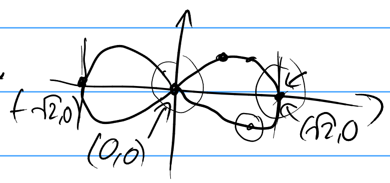
$$= \langle (1,0), \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2) \rangle = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}}}$$

(1) X metr., $M \subseteq X$,

$\rightsquigarrow \forall a \in M \ \exists \varepsilon : \ B(a,\varepsilon) \subseteq M$

$\Rightarrow \ M = \bigcup_{a \in M} B(a,\varepsilon)$ offen

(15):



Def. $o(\|x\|)$: $(x \in \mathbb{R}^n)$ $\qquad \varphi(x) = o(\|x\|^2) :\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{\|x\|^2} = 0$

Beh.: $4x^3y^2 = o(\|xy\|^2)$

Bew.: $\frac{|4x^3y^2|}{\|xy\|^2} = 4 \frac{|x^3y^2|}{\|x^2y^2\|} = 4|x| \xrightarrow{x \to 0} 0$

$$\left\| \frac{4x_n^3y_n^2}{\|x_ny_n\|} - 0 \right\| \longrightarrow 0$$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{\|x\|} = 0$, d.h. $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m : x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow \frac{\varphi(x_n)}{\|x_n\|} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$$\left\| \frac{\varphi(x_n)}{\|x_n\|} - 0 \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$