Zentralübung zu Blatt 1

Satz von Taylor:

Sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]b,c[,\mathbb{R})$, $a \in]b,c[$.

Dann: $\forall x \in]b,c[$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k}_{=: T_n(x)} + R_{n+1}(x),$$

mit $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$,

Lagrange: es ex. η zwischen a und x mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

Aufgabe 3

Vor. wie im Taylor-Satz, $D =]b,c[$.

$$E_n(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n}, & x \in D \setminus \{a\} \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Beh.: $E_n(x)$ ist diff'bar in a, $E_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$.

Bew.: Es $f(x) = T_n(x) + \underbrace{\overbrace{E_n(x)}^{E_n(a)=0} \cdot (x-a)^n}$ für $x \neq a$

laut Def. von $E_n(x)$.

Nach Taylor-Satz gilt

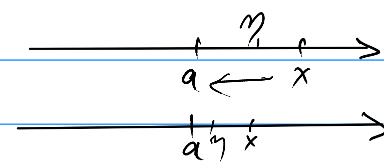
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x,a) \quad \text{für alle } x \in D$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1},$$

η zwischen a und x geeignet.

Also: $E_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)$,



und $$\frac{E_n(x) - E_n(a)}{x-a} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \xrightarrow[\eta \to a]{x \to a} \underline{\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}},$$

da $f^{(n+1)}$ bei $x=a$ stetig ist.

$\square$

Aufgabe 4

Sei $D =]b,c[$, $a \in D$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Def.: $f: D \to \mathbb{R}$ hat in a die Multiplizität n
$:\Leftrightarrow$ f ist n-mal st. db in a,
$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \neq f^{(n)}(a).$$

Vor.: $f: D \to \mathbb{R}$ habe die Multiplizität n, $f \in \mathcal{C}^n(D, \mathbb{R})$.

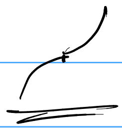
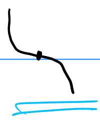
Beh.:
- Ist n ungerade, ist a keine Extremstelle von f
- Ist n gerade, so ist a Maximalstelle, wenn $f^{(n)}(a) < 0$, und a Minimalstelle, wenn $f^{(n)}(a) > 0$.

Bem.: Nach Aufgabe 3 gilt auch:
$$f(x) = T_n(x) + E_n(x) \cdot (x-a)^n$$
hier: $$f(x) = \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + E_n(x)\right)}_{=: g(x) \text{ mit } g(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0} \cdot (x-a)^n$$

Bew.: Für $x \in D$ gilt nach Taylor:
$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{=0} + \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!} \cdot (x-a)^n, \quad \eta \text{ zwischen } a \text{ und } x$$

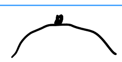
Ist D klein, so hat $f^{(n)}(t)$ für alle $t \in D$ dasselbe VZ wie $f^{(n)}(a)$, da $f^{(n)}$ stetig.
Dann hat auch $f^{(n)}(\eta)$ für alle $x \in D$ stets dasselbe VZ wie $f^{(n)}(a)$!

- Sei n ungerade. Für $\underline{x<a}$ ist $(x-a)^n<0$,
  dann ist $f(x)<f(a)$, falls $\underline{f^{(n)}(a)>0}$
  und $f(x)>f(a)$, falls $\underline{f^{(n)}(a)<0}$.
  Für $\underline{x>a}$ ist $(x-a)^n>0$,
  dann ist $f(x)>f(a)$, falls $\underline{f^{(n)}(a)>0}$
  und $f(x)<f(a)$, falls $\underline{f^{(n)}(a)<0}$.

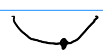
 oder 

Daher kann $f(a)$ kein Extremwert sein.

- Sei n gerade. Dann ist $(x-a)^n \geq 0$.
  - Ist $f^{(n)}(a)<0$, dann folgt $f(x)<f(a)$ für $x\neq a$,
    dann liegt in a ein Maximum vor.



  - Ist $f^{(n)}(a)>0$, dann folgt $f(x)>f(a)$ für $x\neq a$,
    dann liegt in a ein Minimum vor.

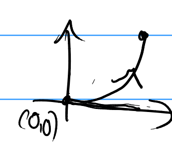


$f: I \to \mathbb{R}^n$ stetig

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \text{ die } f_i : I \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

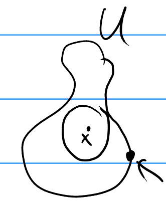
$$\left.\begin{array}{l} f: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \\ \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad f': [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} t \\ f_1(t)=t \\ f_2(t)=t^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in [0,1] \right\} \text{ Graph}$$



$$f: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 \|f'(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} \, dt$$



Rationale Fkt.: $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q Polynome

heißt rationale Fkt.

Falls $Q(X) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, die $a_i \in \mathbb{C}$,

ist $R(x) = \tilde{P}(x) + \dfrac{c_1}{x-a_1} + \dfrac{c_2}{x-a_2} + \dots + \dfrac{c_n}{x-a_n}$

Partialbruchzerlegung

(Heu, Nr. 69.4)

<u>Fundamentalsatz der Algebra:</u> $Q(x) \in \mathbb{C}[X]$,

d.h. $Q(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n x^n$, $m \geq 1$. Dann ex. $a \in \mathbb{C}: Q(a) = 0$.

$\hookrightarrow Q(x) = (x-a_1) \cdot Q_1(x) = (x-a_1) \cdot (x-a_2) \cdot Q_3(x) \dots$