Zentralübung zu Blatt 6

Aufgabe 23

Vor.: $v = (v_1, v_2): U \to \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}_2$,
$f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar sei Potential von v,
d.h. $\operatorname{grad} f = v$, es sei $\gamma := [0,1] \to U$ stetig diff'bar.

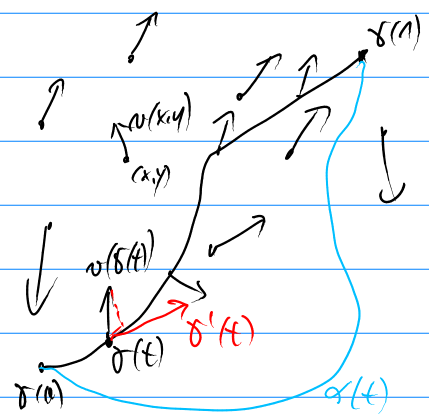
Beh.: $$\int_0^1 \left(v_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + v_2(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t) \right) dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

(Anschaulich: l.S. = Kurvenintegral in Vektorfeld v,
Potential f kann benutzt werden, um dieses zu berechnen!
Die r.S. hängt nur noch von den Endpunkten $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$
des Weges, aber nicht mehr von γ selbst!

Haben: $$\text{l.S.} = \int_0^1 \langle (v_1(\gamma(t)), v_2(\gamma(t))), (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^1 \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

$$=: \int_\gamma v(x)\, dx$$ Kurvenintegral von v entlang der Kurve γ



Bew.: Haben $v = \operatorname{grad} f = (D_1 f, D_2 f)$.
Der Integrand lässt sich damit umschreiben als

$$v_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_2(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t) = D_1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + D_2 f(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)$$
$$= (D_1 f(\gamma(t)), D_2 f(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))^T$$
$$= (Df)(\gamma(t)) \cdot (D\gamma)(t) = \frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t)) \right) \text{ laut Kettenregel.}$$

beachten: $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$. Somit ist

$$\text{l.S.} = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t)) \right) dt = f(\gamma(t)) \Big|_0^1 = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$ $\square$

Aufgabe 24

(a) Vor.: $U \subset \mathbb{R}^n$ Konvex, d.h. $\forall x,y \in U: \{x+t(y-x);\ t\in[0,1]\} \subseteq U$,
$f: U\to\mathbb{R}$ diff'bar, $\forall x\in U: f'(x)=0$.
Beh.: $\exists w\in\mathbb{R}\ \forall x\in U: f(x)=w$, d.h. f ist Konstant auf U.

Haben den MWS im Fall von Funktionen $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$:
Ist $\{a+t(b-a);\ t\in[0,1]\}\subseteq U$, f diff'bar, so ex. für ein $t_0\in[0,1]$: $f(b)-f(a) = f'(a+t_0(b-a))\cdot(b-a)$

$$= \langle \operatorname{grad} f(a+t_0(b-a)),\ b-a\rangle.$$

⇝ Corollar zum MWS in [F]: Ist $M := \sup_{0\le t\le 1}\|Df(x+t\xi)\|$, so ist

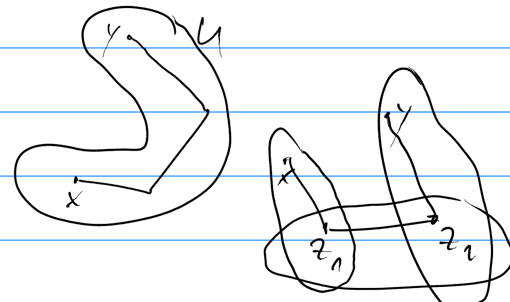
$$\|f(x+\xi)-f(x)\|\le M\cdot\|\xi\|.$$

Bew.: Es sei nun $x\in U$ und sei $w:=f(x)$.
Weiter sei $b\neq x$, $b\in U$.
Dann ist $\{x+t(b-x);\ t\in[0,1]\}\subseteq U$ wegen Konvexität von U.
Nach dem Corollar zum MWS gilt also

$$0\le |f(b)-f(x)| \le \sup_{0\le t\le1} \underbrace{\|f'(x+t(b-x))\|}_{=0 \text{ nach Vor}}\cdot\|b-x\| = 0$$

also $f(b)=f(x)=w$. □

(b) Die Beh. in (a) lässt sich direkt verallgemeinern auf offene Teilmengen U des $\mathbb{R}^n$, die polygonzusammenhängend sind, d.h. je zwei Punkte x,y in U sind durch einen endlichen Streckenzug miteinander verbunden, der ganz in U liegt.



Es gilt (ohne Beweis) für $U \subset \mathbb{R}^n$:

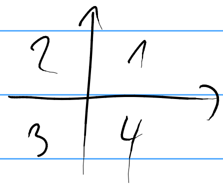
U polygonzush. $\Leftrightarrow$ U wegzusammenhgnd. $\Leftrightarrow$ U zusammenhängend

U wegzush. $:\Leftrightarrow \forall x,y \in U,\ x \neq y: \exists\, s:[0,1] \to U$ stetig, mit $s(0)=x,\ s(1)=y$

U nicht zush. $:\Leftrightarrow \exists\, O_1, O_2 \subset U,\ O_1 \neq \emptyset \neq O_2,\ U = O_1 \cup O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset.$

U zush. $:\Leftrightarrow$ U nicht nicht zush.

(c) Vor.: $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{(x,y);\ x \cdot y = 0\}}_{\text{Achsenkreuz im } \mathbb{R}^2}$



$$f(x,y) := \arctan\left(\tfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right)$$

Beh.: $f(X) = \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$.

Bew.: X ist die Vereinigung der 4 offenen Quadranten $X_1, \dots, X_4$ im $\mathbb{R}^2$, nämlich $X_1 = \mathbb{R}^2_{>0}$, $X_2 = \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}_{>0}$, $X_3 = \mathbb{R}^2_{<0}$, $X_4 = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{<0}$.

Diese sind alle konvex (klar!).

Nun ist für alle $(x,y) \in X$:

$Df(x,y) = (D_1 f(x,y), D_2 f(x,y)) = 0$, denn

$$D_1 f(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{y}{y^2+x^2} - \frac{y}{x^2+y^2} = 0,$$

ebenso $D_2 f(x,y) = 0$ wegen Symmetrie der Funktion f in x und y.

Wegen Teil a) ist f auf jedem der X_i konstant,

auf X_1 ist der Wert dann $f(1,1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

auf X_2 ist der Wert dann $f(-1,1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$

auf X_3 ist der Wert dann $f(-1,-1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

auf X_4 ist der Wert dann $f(1,-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ $\square$

Zu Aufgabe 21)d):

Taylorformel: $U \subset \mathbb{R}^n$, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$\{x + t\xi;\ t \in [0,1]\} \subseteq U$, $f: U \to \mathbb{R}$ (k+1)-mal stetig diff'bar.

Dann ex. $\theta \in [0,1]$:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha.$$

Abkürzungen: $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$,

$$D^\alpha f(x) := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f(x).$$

Vgl. 1-dim. Taylorformel: $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{} + \text{Rest}$$

$\xi \rightsquigarrow x-a$;, $x \rightsquigarrow a$

$$f(x) = \overbrace{\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}}^{\text{das Taylorpolynom vom Grad} = k} \cdot (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(a+\theta(x-a))}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha.$$

$$(x-a)^\alpha = (x_1-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x_2-a_2)^{\alpha_2} \cdots (x_n-a_n)^{\alpha_n}$$ ← Monom vom Grad $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = |\alpha|$

Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \exp(x \sin y)$

Gesucht: Taylorpolynom in $a = (0,0)$ vom Grad ≤ 2:

Ausrechnen: $D_1 f(0,0) = 0$, $D_2 f(0,0) = 0$, $D_1^2 f(0,0) = 0$, $D_2^2 f(0,0) = 0$,

$D_1 D_2 f(0,0) = 1$

[F]: $f(\xi) = 1 + \xi_1 \cdot \xi_2$

$\rightsquigarrow$ Taylorformel: $f(x_1, x_2) = \overbrace{f(0,0)}^{=1} + \frac{1}{1!} \cdot x_1 \cdot x_2 + \text{Rest}$