Zentralübung zur Analysis 2, Blatt 7

Bezeichnungen: Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$,
$\mathcal{U}_a$ die Menge der offenen Umgebungen von a.

Dann: f hat in a ein lokales $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\} :\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_a : f|_U \left\{\begin{matrix}\le f(a)\\ \ge f(a)\end{matrix}\right.$

Gilt dies mit $U = D$, hat f in a ein globales Max. / Min.

Existieren $D_i f(a)$ für alle $1 \le i \le n$,

- so heißt $a \in D$ kritischer Punkt von f, falls $D_i f(a) = 0$ für alle i.
- Hat f in $a \in D$ ein Extremum, so ist a kritischer Punkt von f.

Satz zur Hessematrix: Ist f zweimal partiell diff'bar im kritischen Punkt a und $\operatorname{Hess} f(a) := (D_i D_j f(a))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ semidefinit, so hat f in a ein lokales $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$.

Aufgabe 27

Vor.: $U := (\mathbb{R}_{>0})^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n+1}}}{1 + x_1 + \ldots + x_n}$.

1. Beh.: Bei $a := (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ liegt ein Maximum vor, $f(a) = \frac{1}{n+1}$.

Bew.: Partiellen Ableitung:

$$D_i f(x) = \frac{\frac{1}{n+1} \cdot (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{x_i} \cdot (1 + x_1 + \ldots + x_n) - (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n+1}} \cdot 1}{(1 + x_1 + \ldots + x_n)^2}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{x_i} \cdot f(x) - \frac{f(x)}{1 + x_1 + \ldots + x_n}.$$

Kritischer Punkt: $\forall i: \; 1 + x_1 + \ldots + x_m = x_i\,(m+1)$

$$\iff \quad x_i = \frac{1}{m+1}\,(1 + x_1 + \ldots + x_m),$$

die x_i sind also alle gleich, etwa alle $= x$.

Dann ist $1 + mx = (m+1)x \iff x = 1$,

d.h. $a = (1, 1, \ldots, 1)$ liegt ein kritischer Punkt vor,

wir haben $f(a) = \frac{1}{m+1}$.

Dort hat f ein Maximum.

Haben $D_i f(x) = \left(\frac{1}{x_i(m+1)} - \frac{1}{1+x_1+\ldots+x_m}\right) \cdot f(x)$,

also $D_j D_i f(x) = \frac{f(x)}{(1+x_1+\ldots+x_m)^2} + (\ldots\ldots) \cdot D_j f(x)$ falls $j \neq i$

und $D_i^2 f(x) = \left(-\frac{1}{x_i^2(m+1)} + \frac{1}{(1+x_1+\ldots+x_m)^2}\right) f(x) + (\ldots) \cdot D_i f(x)$.

Somit: $D_j D_i f(a) = f(a) \cdot \frac{1}{(m+1)^2} + 0 = \frac{1}{(m+1)^3} > 0$

und $D_i^2 f(a) = \left(-\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2}\right) \cdot \frac{1}{m+1} + 0 = \frac{1}{(m+1)^3} - \frac{1}{(m+1)^2} < 0$.

Dann ist $\operatorname{Hess} f(a) = \frac{1}{(m+1)^3} \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -m & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & -m \end{pmatrix}$ negativ definit,

denn $-\operatorname{Hess} f(a)$ ist positiv definit:

$$A := \begin{pmatrix} m & -1 & -1 & \\ -1 & m & -1 & \\ -1 & -1 & m & \\ & & & \ddots \; m \end{pmatrix}$$

Sei I_m = m-te Einheitsmatrix $= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $J_m := (1)_{i,j}$,

dann $A = (m+1) I_m - J_m$,

z.z. A ist pos. definite Matrix, d.h. $\forall x \neq 0: \langle Ax, x \rangle > 0$.

Sei $x \neq 0$, dann haben $\langle Ax, x \rangle = x^T A x = (m+1) \cdot x^T I_m x - x^T \cdot J_m x$

$= (m+1) \cdot x^T x - x^T \cdot \left(\sum x_i, \ldots, \sum x_i\right)^T = (m+1) \cdot \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2 \overset{!}{>} 0$,

denn $\left(\sum_i x_i\right)^2 = \left(\sum_i 1 \cdot x_i\right)^2 \underset{CS}{\leq} \left(\sum_i 1^2\right) \cdot \left(\sum_i x_i^2\right) = m\left(\sum_i x_i^2\right) < (m+1) \sum x_i^2$. ✓

2. Beh.: $\forall y_1,\dots,y_{n+1} > 0 : \sqrt[n+1]{y_1 \cdots y_{n+1}} \le \frac{y_1+\dots+y_{n+1}}{n+1}$.

Bew.: Setzen $x_i := \frac{y_i}{y_{n+1}}$ für $1 \le i \le n$ und wegen der 1. Beh.

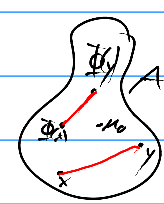
gilt
$$\underbrace{\frac{(y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n+1}} \cdot y_{n+1}^{-\frac{n}{n+1}}}{1 + \frac{y_1}{y_{n+1}} + \dots + \frac{y_n}{y_{n+1}}}}_{} \le \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n+1}} \cdot y_{n+1}^{-\frac{n}{n+1}+1}}{y_1 + y_2 + \dots + y_{n+1}}$$
, jetzt $-\frac{n}{n+1} + 1 = \frac{1}{n+1}$,
es folgt die 2. Beh. $\square$

Banachscher Fixpunktsatz:

Vor.: $(V, \|\cdot\|)$ vollst. normierter VR, $A \subseteq V$ abgeschlossen,
$\Phi : A \to A$ Kontraktion,
d.h. $\exists\, \theta \in\,]0,1[\ \forall u, v \in A$:

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \le \theta \cdot \|u - v\|.$$



Beh.: • $\exists!\, \bar{u} \in A : \Phi(\bar{u}) = \bar{u}$,
d.h. Φ hat genau einen Fixpunkt.

• Für alle $u_0 \in A$ konvergiert die Folge $\underbrace{u_0, \Phi(u_0), \Phi^2(u_0), \Phi^3(u_0), \dots}_{(u_k)_{k\in\mathbb{N}_0},\ u_0 \in A,\ u_k := \Phi(u_{k-1}).}$ gegen $\bar{u}$.

Aufgabe 28

(a) Vor.: $M := \mathbb{R}^2$, $\|u\|_\infty := \max\{|u_1|,|u_2|\}$,

$$f(u) := \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}u + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{8}(u_1-u_2+8), \frac{1}{8}(-2u_1+3u_2-8)\right)^T.$$

• Beh.: $(M, \|\cdot\|_\infty)$, f erfüllen die Vor. des Banachschen Fixpunktsatzes, $(M,\|\cdot\|_\infty)$ ist vollst. normierter VR und f ist eine Kontraktion,
d.h. z.z. $\exists\, \theta \in\,]0,1[\ \forall u,v \in M : \|f(u)-f(v)\|_\infty \le \theta \cdot \|u-v\|_\infty$.

Bew.: Für $u,v \in M$ ist

$$\|f(u)-f(v)\|_\infty = \frac{1}{8}\cdot \|((u_1-v_1)-(u_2-v_2), -2(u_1-v_1)+3(u_2-v_2))^T\|_\infty$$

$$= \frac{1}{8}\max\{|(u_1-v_1)-(u_2-v_2)|, |-2(u_1-v_1)+3(u_2-v_2)|\}$$

$$\le \frac{1}{8}\cdot\max\{2,5\}\cdot\max\{|u_1-v_1|,|u_2-v_2|\} \le \frac{5}{8}\cdot\|u-v\|_\infty,$$

damit ist $\theta := \frac{5}{8}$ ein gültiger Kontraktionsfaktor. $\square$

Nach dem B.-Fixpunktsatz hat f einen eindeutigen Fixpunkt.

• 2 Iterationen berechnen: $f(v_0) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}11\\-16\end{pmatrix}$,

$$f(f(v_0)) = \frac{1}{8^2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\-16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{8^2}\cdot\begin{pmatrix}91\\-134\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1.422\\-2.094\end{pmatrix}$$

• Direktes Berechnen des Fixpunktes: $f(x,y) = (x,y)$

$$\iff \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8x\\8y\end{pmatrix} \underset{\dots}{\iff} (x,y) = \frac{1}{11}(16,-24)^T \approx (1.455, -2.182)^T$$

(b) Vor.: (X,d) kompakter metrischer Raum, $\varphi: X \to X$ schwach kontrahierend,
d.h. $\forall x,y \in X, x \ne y : d(\varphi(x),\varphi(y)) < d(x,y)$. ⊗

Beh.: $\underbrace{\exists\, z \in X : \varphi(z) = z}_{\text{Ex.}}$, und ist $\underbrace{\bar{z} \in X \text{ mit } \varphi(\bar{z}) = \bar{z}, \text{ so folgt } \bar{z} = z}_{\text{Eind.}}$.

Bew.: ⊙ Ex.: Def. $\Psi : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\Psi(x) := d(\varphi(x), x)$.

Da φ stetig, ist Ψ stetig.

$[\Psi = d \circ f$, $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f : X \to X \times X$, $x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ x \end{pmatrix}]$.

Da Ψ auf einem Kompaktum definiert ist, ist $\Psi(X)$ kompakt in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, Ψ nimmt also ihr Minimum an, etwa bei z. • Ist $\Psi(z) = 0$, so ist z Fixpunkt von φ. ✓

• Andernfalls ist $\Psi(z) > 0$. Dann gilt

$$\Psi(z) = d(\varphi(z), z) \underset{\circledast}{>} d(\varphi(\underline{\varphi(z)}), \underline{\varphi(z)}) = \Psi(\varphi(z)),$$

im ↯ zur Ann., dass Ψ bei z ihr Minimum annimmt.

⊙ Eind.: Wäre $\varphi(\bar{z}) = \bar{z}$, $\varphi(z) = z \neq \bar{z}$, so folgte $\underbrace{d(\varphi(\bar{z}), \varphi(z))}_{d(\bar{z}, z)} \overset{\circledast}{<} d(z, \bar{z})$, ↯. □