Übungen zur **Blatt 11**
Elementaren Zahlentheorie 24.06.2013

Falko Lorenz, Karin Halupczok SoSe 2013

Abgabetermin: Mittwoch, 3. Juli 2013, bis 16:10 Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 41:

Für welche Primzahlen $p > 2$ ist 7 quadratischer Rest mod p?

Aufgabe 42:

Seien $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Zeige: Aus $p \mid a^m - 1$ und $p^2 \mid a^{p-1} - 1$ folgt $p^2 \mid a^m - 1$.

Aufgabe 43:

(a) Gegeben sei ein ungerades $b \in \mathbb{N}$. Zeige: Gilt $\left(\dfrac{y}{b}\right) = 1$ für alle $y \in \mathbb{N}$ mit $(y, b) = 1$, so ist b eine Quadratzahl. (Tip: Chinesischer Restsatz)

(b) Sei a eine beliebige ganze Zahl $\neq 0$. Gibt es unendlich viele Primzahlen p, für die a quadratischer Rest mod p ist? (Hinweis: Aufgabe 34)

Aufgabe 44:

Gegeben ein $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Zeige: Gilt $\left(\dfrac{a}{x}\right) = 1$ für alle ungeraden $x \in \mathbb{N}$ mit $(x, a) = 1$, so ist a eine Quadratzahl. (Hinweis: o. E. sei a quadratfrei. Es ist $a = 2^{\alpha}(-1)^{\beta}a^*$ mit einem $a^* \equiv 1 \bmod 4$ aus $\mathbb{Z}$. Quadratisches Reziprozitätsgesetz, Anwendung von Aufgabe 43(a) auf $|a^*|$ sowie Chinesischer Restsatz liefern $a^* = \pm 1$, also $a^* = 1$.)
Man folgere: Ist a keine Quadratzahl, so gibt es unendlich viele Primzahlen p, für die a kein quadratischer Rest mod p ist. (3P extra)