

Abgabetermin: Mittwoch, 17. April 2013, bis 16:10 Uhr in die Briefkästen

Aufgabe 1:

Es seien $a, m, s, t \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$. Zeige:

- (i) Die Zahl $a^{st} - 1$ ist durch $a^t - 1$ teilbar.
- (ii) Ist $a^m - 1$ eine Primzahl, so auch m und es ist $a = 2$.

Die Zahlen $M_p = 2^p - 1$, p Primzahl, heißen *Mersennesche Zahlen*.

Für welche $p \leq 11$ ist M_p eine Primzahl? Die größte zur Zeit bekannte Primzahl ist $M_{57885161}$.
Wieviele Dezimalstellen hat diese Zahl? (3P extra)

Aufgabe 2:

Es sei $M = \{1 + 4k \mid k \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 5, 9, 13, \dots\}$. Ein $p \neq 1$ aus M heiße *M-Primzahl*, wenn 1 und p die einzigen Zahlen aus M sind, die p teilen.

Zeige: (M, \cdot) ist eine (kommutative) Halbgruppe (mit Eins) und aus $a, ab \in M$ folgt $b \in M$. Jede Zahl ($\neq 1$) aus M ist Produkt von *M-Primzahlen*. Diese Produktzerlegungen sind aber i. a. *nicht* eindeutig.

(Tip: Man suche Beispiele von *M-Primzahlen*, die keine Primzahlen sind.)

Aufgabe 3:

Man beweise oder widerlege: Es gibt ein $n \geq 2$ aus \mathbb{N} mit $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4:

Es seien $a, b, m, n \in \mathbb{N}$. Zeige:

- (i) Ist n ungerade, so ist $a + b$ ein Teiler von $a^n + b^n$.
- (ii) Ist $a \geq 2$ und $a^m + 1$ eine Primzahl, so ist m eine Potenz von 2 und a ist gerade.

Speziell die Zahlen $F_k = 2^{2^k} + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, heißen *Fermatsche Zahlen*. Die Fermatsche Zahl F_5 ist *keine* Primzahl. Man zeige dazu: Für $x = 2$ ist $x^{32} + 1$ teilbar durch $x^9 + x^7 + 1$ ("Polynomdivision" unter Beachtung von Relationen der Gestalt $x^{k+1} = x^k + x^k$. 3P extra)