Übungen zur **Blatt 9**
Elementaren Zahlentheorie 10.06.2013

Falko Lorenz, Karin Halupczok SoSe 2013

Abgabetermin: Mittwoch, 19. Juni 2013, bis 16:10 Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 33:

(a) Man bestimme alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) = 2$.

(b) Zeige: Für jede natürliche Zahl $n > 1$ ist die Summe der zu n primen $k < n$ aus $\mathbb{N}$ gleich $\frac{1}{2}n\varphi(n)$.

(c) Zeige: Für jede natürliche Zahl $m > 1$ bestimme man das Produkt aller Primitivwurzeln von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. (Für alle von $3, 4 \bmod 6$ verschiedenen m ergibt sich das „gleiche“ Ergebnis; ein Produkt über die leere Menge wird gleich 1 gesetzt.)

Aufgabe 34:

Sei $f(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ ein Polynom vom Grade $n \geq 1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Es bezeichne P_f die Menge aller Primzahlen p, für welche die Kongruenz

$$f(X) \equiv 0 \bmod p$$

lösbar in $\mathbb{Z}$ ist. Zeige: Die Menge P_f ist unendlich.
(Hinweis: Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ mit $|f(x)| \geq 2$ für alle $x \geq c$. Übergang zu $g(X) = f(cX)$ zeigt, daß man o. E. $c = 1$ annehmen darf. Ferner kann man von $a_0 \neq 0$ ausgehen. Ist nun $a_0 = 1$, so verfahre man ganz ähnlich wie in Euklids Beweis. Auf den Fall $a_0 = 1$ kann man sich aber per Übergang zu $g(X) = f(a_0X)$ leicht zurückziehen.)

Aufgabe 35:

Sei u_k eine Fibonaccizahl mit ungeradem Index k. Zeige: Jeder ungerade Teiler von u_k ist kongruent zu $1 \bmod 4$; außerdem ist u_k nicht durch 4 teilbar. (Dazu gehe man z. B. aus von der Relation $u_{2m-1} = u_m^2 + u_{m-1}^2$.) Man folgere daraus: Es gibt unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 1 \bmod 4$. Wie folgt das auch aus Aufgabe 34?
Zeige (für 2P extra), daß es auch unendlich viele Primzahlen $p \equiv 3 \bmod 4$ gibt.

Aufgabe 36:

Da F_5 nach Aufgabe 27 nur Primteiler $\equiv 1 \bmod 4$ besitzt und nicht prim ist, hat F_5 neben der offensichtlichen eine davon wesentlich verschiedene Darstellung als Summe zweier Quadrate. Man gebe diese an.
(Hinweis: Wir wissen $F_5 = 641(a^2 + b^2) = (25 + 4i)(25 - 4i)(a + bi)(a - bi)$. Wären a und b schon bekannt, so ist die Lösung klar. Wegen $F_5 = (2^{16} + i)(2^{16} - i)$ ist das Primelement $25 - 4i$ entweder ein Teiler von $2^{16} + i$ oder $2^{16} - i$. Ist ersteres der Fall, wäre also

$$\frac{2^{16} + i}{25 - 4i} = a + bi$$

zu berechnen.)