Übungen zur
Elementaren Zahlentheorie

1. Semesterwoche, ohne Abgabe, nur Besprechung am 20./21.10.2014

14.10.2014

Falko Lorenz, Karin Halupczok

WiSe 2014/15

Übung 1:

R kommutativer Ring mit 1. Zeige:

(a) Ist R Integritätsring, so auch der Polynomring $R[X]$ (und umgekehrt)
$\lceil$ $\mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g) = \mathrm{grad}(fg)$, falls R Int.ring $\rfloor$ $\lceil$ $\mathrm{grad}(0) = -\infty$ $\rfloor$

(b) $R[X]^\times = R^\times$, falls R Int.ring. Aber nicht allgemein:

(c) Gibt es ein $a \neq 0$ aus R mit $a^2 = 0$, so gilt $R[X]^\times \neq R^\times$. Zusatz: gibt es $x \neq 0$ aus R mit $x^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, so auch $a \neq 0$ mit $a^2 = 0$.

Noch ohne Beweis[1] erwähnen: Gilt $R[X]^\times \neq R^\times$, so gibt es ein $a \neq 0$ aus R mit $a^2 = 0$.

Übung 2:

Man beweise $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{\pm(1+\sqrt{2})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Etwa wie folgt: Zunächst gilt für bel. $\varepsilon = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$:

(i) $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times \iff N(\varepsilon) = \pm 1$ (Dabei sei $N(\varepsilon) := (a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.)

Betrachte nun folgende (multiplikativ abgeschlossene) Teilmenge

$$M = \{\varepsilon \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times \mid \varepsilon > 1\}$$

von $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ und zeige:

(ii) $\varepsilon = a + b\sqrt{2} \in M \Longrightarrow a \geq 1$ und $b \geq 1$
Folgerung: $\varepsilon_0 := 1 + \sqrt{2}$ ist das kleinste Element von M.
Tip: Wäre z. B. $a \leq 0$, so $-a + b\sqrt{2} \geq a + b\sqrt{2} > 1$, also das Produkt $2b^2 - a^2 > 1$, ein Widerspruch zu $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ nach (i).

(iii) Jedes $\varepsilon \in M$ ist eine natürliche Potenz von ε_0.
(Tip: Zu ε gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_0^n \leq \varepsilon < \varepsilon_0^{n+1}$.)

(iv) Für bel. $\varepsilon \neq \pm 1$ aus $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ liegt eine der Zahlen $\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}, -\varepsilon, -\frac{1}{\varepsilon}$ in M.

---

[1] mit "kommutativer Algebra" leicht. Aber auch direkter $\lceil$ rechnerischer $\rfloor$ Beweis möglich.