Übungen zur **Blatt 1**
Elementaren Zahlentheorie 17.10.2014

Falko Lorenz, Karin Halupczok WiSe 2014/15

Abgabetermin: Freitag, 24. Oktober 2014, bis 10:10 Uhr in die Briefkästen

Aufgabe 1:

Es seien $a, m, s, t \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$. Zeige:

(i) Die Zahl $a^{st} - 1$ ist durch $a^t - 1$ teilbar.

(ii) Ist $a^m - 1$ eine Primzahl, so auch m und es ist $a = 2$.

Die Zahlen $M_p = 2^p - 1$, p Primzahl, heißen *Mersennesche Zahlen*.
Für welche $p \leq 11$ ist M_p eine Primzahl? Die größte zur Zeit bekannte Primzahl ist $M_{57885161}$.
Wieviele Dezimalstellen hat diese Zahl? (3P extra)

Aufgabe 2:

Es sei $M = \{1 + 4k \mid k \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 5, 9, 13, \dots\}$. Ein $p \neq 1$ aus M heiße *M-Primzahl*, wenn 1 und p die einzigen Zahlen aus M sind, die p teilen.
Zeige: $(M, \cdot)$ ist eine (kommutative) Halbgruppe (mit Eins) und aus $a, ab \in M$ folgt $b \in M$.
Jede Zahl ($\neq 1$) aus M ist Produkt von M-Primzahlen. Diese Produktzerlegungen sind aber i. a. *nicht* eindeutig.
(Tip: Man suche Beispiele von M-Primzahlen, die keine Primzahlen sind.)

Aufgabe 3:

Die natürlichen Zahlen c und d seien im Dualsystem durch die Zifferdarstellungen $c = 110011000111101100000001$ und $d = 1010000001$ gegeben. Berechne durch „schriftliche Multiplikation im Dualsystem“ die Dualzifferndarstellung von cd.

Aufgabe 4:

Es seien $a, b, m, n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(i) Ist n ungerade, so ist $a + b$ ein Teiler von $a^n + b^n$.

(ii) Ist $a \geq 2$ und $a^m + 1$ eine Primzahl, so ist m eine Potenz von 2 und a ist gerade.

Speziell die Zahlen $F_k = 2^{2^k} + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, heißen *Fermatsche Zahlen*. Die Fermatsche Zahl F_5 ist *keine* Primzahl, denn sie besitzt nach Aufgabe 3 den echten Teiler $d =$.