Übungen zur **Blatt 2**
Elementaren Zahlentheorie 24.10.2014

Falko Lorenz, Karin Halupczok WiSe 2014/15

Abgabetermin: Freitag, 31. Oktober 2014, bis 10:10 Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 5:

Sei $d > 1$ eine natürliche Zahl, z. B. $d = 10$. Dann hat jede natürliche Zahl x eine Darstellung der Gestalt

$$x = \sum_{i=0}^{n} c_i d^i \text{ mit } c_i \in \{0, 1, \ldots, d-1\},\ c_n \neq 0.$$

Man beweise dies auf zweierlei Weise, indem man einmal sozusagen nach rechts zum Komma hin entwickelt (also zuerst c_n bestimmt) und ein andermal vom Komma an nach links (also zuerst c_0 bestimmt). Ist die Darstellung eindeutig?

Welche Zahlen lassen sich übrigens in der Form $\sum_{i=0}^{n} c_i 3^i$ mit $c_i \in \{-1, 0, 1\}$ ausdrücken? Wie steht es dabei mit der Eindeutigkeit? (4P extra)

Aufgabe 6:

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ mit $d \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$. Warum ist für jedes $\alpha \in R$ die Darstellung $\alpha = a + b\sqrt{d}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ *eindeutig*? Für $\alpha = a + b\sqrt{d}$ setze man $\alpha' := a - b\sqrt{d}$ und $N(\alpha) = \alpha\alpha' = a^2 - b^2 d$ und zeige:

(1) $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \{x + y\sqrt{d} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Körper.

(2) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in R$.

(3) $\alpha \mid \beta$ in $R \Rightarrow N(\alpha) \mid N(\beta)$.

(4) Für $\alpha \in R$ gilt: $\alpha \in R^\times \Leftrightarrow N(\alpha) \in \mathbb{Z}^\times$, d. h. $N(\alpha) = \pm 1$.

Aufgabe 7:

Man bestimme die Einheitengruppe $R^\times$ für $R = \mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Aufgabe 8:

Man untersuche, ob es sich im folgenden um Zerlegungen in *unzerlegbare* Faktoren handelt, und wenn ja, ob um wesentlich verschiedene:

(i) $21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

(ii) $7 = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = (4\sqrt{2} + 5)(4\sqrt{2} - 5)$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

(iii) $6 = 2 \cdot 3 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$