

Abgabetermin: Freitag, 21. November 2014, bis 10:10 Uhr in die Briefkästen

Aufgabe 17:

- (a) Wieviel Dezimalstellen hat u_{100} ?
- (b) Man zeige, dass $u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3$ durch 9 teilbar ist, wenn u_n durch 3 teilbar ist.
- (c) Ist u_n genau dann durch 17 teilbar, wenn 9 ein Teiler von n ist?
- (d) Was kann man über (Existenz und Wert von) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+k}}{u_n}$ sagen?
- (e) Man zeige, dass $5u_n^2 + 4(-1)^n$ stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 18:

(a) $\sum_{k=1}^n ku_k - (n+1)u_{n+2} + u_{n+4} = ?$ $\sum_{k=1}^n ku_{2k} - nu_{2n+1} = ?$

(b) *Lucas 1876:* Es gilt

$$u_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-j_n}{j_n-1} + \binom{n-j_n-1}{j_n}$$

mit $j_n := \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Man leite das Ergebnis von Lucas her.

Aufgabe 19:

Wir betrachten Brüche $\frac{b}{a}$ mit natürlichen Zahlen $b > a$. Man zeige:

- (a) Ist $a < u_{m+1}$, so besteht die Anwendung des Euklidischen Algorithmus auf a, b aus weniger als m Schritten, d. h. die Kettenbruchentwicklung von $\frac{b}{a}$ hat die Gestalt $[q_0; q_1, \dots, q_n]$ mit $n+1 \leq m-1$. Man gebe (zu beliebigem $m \geq 2$) ein Beispiel an, bei dem man genau $m-1$ Schritte benötigt.
- (b) Für die Anzahl N der Schritte beim Euklidischen Algorithmus für a, b gilt

$$N \leq \frac{\log a}{\log \alpha} + 1 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Aufgabe 20:

Zur Entlastung Ihrer fleißigen Korrektoren fällt diese Aufgabe aus. Dafür sind je 7 Punkte bei den Aufgaben 17 und 19 erzielbar und 6 bei Aufgabe 18.