Falko Lorenz, Karin Halupczok WiSe 2014/15

Abgabetermin: Freitag, 05. Dezember 2014, bis 10:10 Uhr in die Briefkästen

Aufgabe 25:

(a) Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie eine natürliche Zahl $d > 1$. Mittels Kettenbruchentwicklung zeige man, daß es ganze Zahlen x und y gibt mit

$$0 < x < d \quad \text{und} \quad |\alpha x - y| \leq \frac{1}{d}.$$

(b) Gegeben sei eine natürliche Zahl $m > 1$ sowie $d, e \in \mathbb{N}$ mit

$$1 < d, e \leq m < de.$$

Man zeige: Ist $c \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu m, so gibt es $x, x' \in \mathbb{Z}$ mit

$$0 < x < d,\ 0 < x' < e \quad \text{und} \quad x' \equiv \pm cx \bmod m.$$

(Tip: Wende (a) auf $\alpha = \frac{c}{m}$ an.)

Aufgabe 26:

Sei p eine Primzahl > 2. Zeige: Ist $p \equiv 1 \bmod 8$, so ist jede der folgenden Kongruenzen in $\mathbb{Z}$ lösbar:

(a) $X^4 \equiv -1 \bmod p$, (b) $X^2 \equiv 2 \bmod p$.

Gilt jeweils auch die Umkehrung?
(Hinweis zu (a): Es gibt Primitivwurzeln mod p. Hinweis zu (b): $(X^2+1)^2 - 2X^2 = X^4 + 1$.)

Aufgabe 27:

Sei p ein Primteiler der *Fermatschen Zahl*

$$F_n := 2^{2^n} + 1.$$

(a) Durch Betrachtung der Ordnung der Restklasse 2 mod p zeige man, daß p die Gestalt $p = 1 + k2^{n+1}$ hat. Für $n \geq 2$ ist insbesondere $p \equiv 1 \bmod 8$.
(b) Sei $n \geq 2$. Indem man Aufgabe 26 (b) benutzt, zeige man, daß sogar $p = 1 + t2^{n+2}$ mit einem $t \in \mathbb{N}$ gelten muß.
(c) Man erschließe: 641 ist der kleinste Primteiler von F_5. (Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass F_5 die Primfaktorzerlegung $F_5 = 641 \cdot 6700417$ hat.)

Aufgabe 28:

Fällt aus. Dafür sind je 7 Punkte bei den Aufgaben 26 und 27 erzielbar und 6 bei Aufgabe 25.