Übungen zur **Blatt 8**
Elementaren Zahlentheorie 05.12.2014

Falko Lorenz, Karin Halupczok WiSe 2014/15

Abgabetermin: Freitag, 12. Dezember 2014, bis 10:10 Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 29:

Für die Eulersche φ-Funktion zeige man:

(a) Für jedes n gibt es ein a mit $\varphi(a) = n!$ (Tip nach Erdős: $\prod_{p \le n}(p-1) \mid n!$).

(b) Aus $a \mid b$ folgt $\varphi(a) \mid \varphi(b)$.

(c) Ist $\varphi(n) \mid n$, so ist $n = 2^\alpha 3^\beta$ mit $\alpha, \beta \ge 0$.

(d) Bestimmen Sie alle $n > 6$, für die die $\varphi(n)$ vielen zu n teilerfremden Zahlen $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{\varphi(n)} = n-1$ eine arithmetische Progression $a_1 = 1,\ a_2 = 1 + (p-1),\ a_3 = 1 + 2(p-1), \ldots,\ a_{\varphi(n)} = 1 + (\varphi(n)-1)(p-1)$ bilden. (4P extra)

Aufgabe 30:

Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \mid n$ zeige man, daß der natürliche Homomorphismus

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$$

surjektiv ist. (Hinweis: Betrachte den Fall $n = mp$, p prim.)

Aufgabe 31:

Sei n eine natürliche Zahl > 2. Genau dann gilt

(H) $\qquad x^{n-1} \equiv 1 \bmod n \qquad$ für alle zu n primen x aus $\mathbb{Z}$,

wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
n ist ungerade, n ist quadratfrei, und für jeden Primteiler p von n gilt $p - 1 \mid n - 1$. Man beweise dies und gebe (für 2P extra) ein $n \notin \mathbb{P}$ an, für welches (H) gilt.

Aufgabe 32:

Seien p eine ungerade Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Im Körper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ betrachte man die Summe

$$s = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (p-1)^n$$

der n-ten Potenzen aller Elemente a der multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_p^\times$ von $\mathbb{F}_p$ und zeige: Ist $p-1$ kein Teiler von n, so gilt $s = 0$. Ist n dagegen teilbar durch $p-1$, so gilt $s = -1$. (Tip: Nutze die Existenz einer Primitivwurzel ζ.)