

Abgabetermin: Freitag, 16. Januar 2015, bis 10:10 Uhr in die Briefkästen

Aufgabe 41:

Für welche Primzahlen p (mit $p \neq 2, 11$) ist 11 quadratischer Rest mod p ?

Aufgabe 42:

Seien $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Zeige: Aus $p \mid a^m - 1$ und $p^2 \mid a^{p-1} - 1$ folgt $p^2 \mid a^m - 1$.

Aufgabe 43:

- (a) Gegeben sei ein ungerades $b \in \mathbb{N}$. Zeige: Gilt $\left(\frac{y}{b}\right) = 1$ für alle $y \in \mathbb{N}$ mit $(y, b) = 1$, so ist b eine Quadratzahl. (Tip: Chinesischer Restsatz, o. E. b quadratfrei)
- (b) Sei a eine beliebige ganze Zahl $\neq 0$. Gibt es unendlich viele Primzahlen p , für die a quadratischer Rest mod p ist? (Hinweis: Aufgabe 34)

Aufgabe 44:

Gegeben ein $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Zeige: Gilt $\left(\frac{a}{x}\right) = 1$ für alle ungeraden $x \in \mathbb{N}$ mit $(x, a) = 1$, so ist a eine Quadratzahl. (Hinweis: o. E. sei a quadratfrei. Es ist $a = 2^\alpha (-1)^\beta a^*$ mit einem $a^* \equiv 1 \pmod{4}$ aus \mathbb{Z} . Quadratisches Reziprozitätsgesetz, Anwendung von Aufgabe 43(a) auf $|a^*|$ sowie Chinesischer Restsatz liefern $a^* = \pm 1$, also $a^* = 1$.)
Man folgere: Ist a keine Quadratzahl, so gibt es unendlich viele Primzahlen p , für die a kein quadratischer Rest mod p ist. (3P extra)