<u>Lemma 1:</u> Sei α quadr. Irrationalzahl mit Diskriminante D. Dann sind auch alle Reste α_n quadr. Irrationalzahlen mit der <u>gleichen</u> Diskriminante D.

<u>Bew.</u> Per Induktion genügt es, dies für α_1 zu zeigen. Es ist

$$\alpha = q + \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{mit } q = q_0 .$$

Aus (1) folgt damit

$$a\left(q+\frac{1}{\alpha_1}\right)^2 + b\left(q+\frac{1}{\alpha_1}\right) + c = 0 \quad . \text{ Mult. mit } \alpha_1^2 :$$

$$\underbrace{(aq^2+bq+c)}_{\neq 0, \text{ da } \alpha_1 \notin \mathbb{Q}}\alpha_1^2 + (b+2aq)\alpha_1 + a = 0$$

$\ulcorner \text{ggT}(aq^2+bq+c,\ b+2aq,\ a) = 1$, da $\text{ggT}(a,b,c)=1 \lrcorner$

egal, ob Faktor von α_1^2 positiv oder nicht, ist die Diskriminante von α_1 gleich

$$(b+2aq)^2 - 4a(aq^2+bq+c) = b^2 - 4ac = D. \quad \square$$

<u>Def.</u> Eine quadr. Irrationalzahl α heißt <u>reduziert</u>, wenn

(R) $\quad \alpha > 1 \quad$ und $\quad -1 < \alpha' < 0$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{-\frac{1}{\alpha'} > 1}$$

<u>Bsp.</u> $D \in \mathbb{N}$, kein Quadrat. $\quad a := [\sqrt{D}] \qquad \ulcorner 1 \le a < \sqrt{D} < a+1 \lrcorner$

Dann ist $\alpha := a + \sqrt{D}$ <u>reduziert</u>. Denn: Offenbar $\alpha > 1$ und $\quad -1 < a - \sqrt{D} < 0$.

<u>Lemma 2:</u> Zu festem D gibt es nur <u>endlich viele</u> <u>reduzierte</u> quadr. Irrationalzahlen mit Diskriminante D.

Bew. Wegen (R) ist insb. $\alpha' < \alpha$. Es folgt

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \alpha' = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$1 < \alpha,\ -1 < \alpha', \implies 0 < \alpha + \alpha' = -\frac{b}{a}, \overset{a>0}{\implies} b < 0$$

$$\alpha' < 0, \implies -b - \sqrt{D} < 0. \text{ Also } ①\ -\sqrt{D} < b < 0$$

$$1 < \alpha, \implies 2a < -b + \sqrt{D} \overset{①}{<} 2\sqrt{D}, \text{ also } ②\ 0 < a < \sqrt{D}$$

$$D = b^2 - 4ac, \implies ③\ c = \frac{b^2 - D}{4a}$$

①, ②, ③ $\Rightarrow$ es gibt nur endlich viele Möglichkeiten für $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

<u>Lemma 3:</u> Die Reste α_n einer quadr. Irrationalzahl α sind von einer Stelle n_0 an alle <u>reduziert</u>.*)

<u>Bew.</u> Für bel. $n \in \mathbb{N}$ gilt $\alpha_n > 1$; ferner

$$\alpha = \frac{c_n \alpha_{n+1} + c_{n-1}}{d_n \alpha_{n+1} + d_{n-1}}, \implies \alpha_{n+1} = \frac{d_{n-1}\alpha - c_{n-1}}{-d_n \alpha + c_n}, \implies$$

$$\alpha'_{n+1} = \frac{d_{n-1}\alpha' - c_{n-1}}{-d_n \alpha' + c_n} \quad [\text{denn } \xi \mapsto \xi' \text{ ist Isomorph.}], \implies$$

$$-\frac{1}{\alpha'_{n+1}} = \frac{d_n \alpha' - c_n}{d_{n-1}\alpha' - c_{n-1}} \cdot \frac{d_{n-1}}{d_{n-1}} = \frac{d_n d_{n-1}\alpha' - c_n d_{n-1}}{d_{n-1}(d_{n-1}\alpha' - c_{n-1})}$$

$$\text{Zähler} = d_n d_{n-1}\alpha' - \underbrace{c_n d_{n-1} + c_{n-1} d_n}_{(-1)^n} - c_{n-1} d_n, \text{ also}$$

$$-\frac{1}{\alpha'_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{d_{n-1}(d_{n-1}\alpha' - c_{n-1})} + \frac{d_n(d_{n-1}\alpha' - c_{n-1})}{d_{n-1}(d_{n-1}\alpha' - c_{n-1})} = \frac{d_n}{d_{n-1}} + \frac{(-1)^n}{d_{n-1}^2\left(\alpha' - \frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}\right)}$$

---

*) Nach Lemma 1 sind alle α_n <u>quadr.</u> Irrationalzahlen (mit der gleichen Diskriminante)

$$= \frac{1}{d_{n-1}}\left(d_n + \frac{(-1)^n}{d_{n-1}\left(\alpha' - \frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}\right)}\right) =$$

$$1 + \frac{1}{d_{n-1}}\left\{ \underbrace{(d_n - d_{n-1})}_{\geq 1 \text{ für } n \geq 2} + \overbrace{\frac{(-1)^n}{d_{n-1}\left(\alpha' - \frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}\right)}}^{\to 0 \text{ für } n \to \infty} \right\} > 1 \text{ für fast alle } n.$$

$\searrow$ für $n \to \infty$ $\alpha \neq \alpha'$

Also ex. ein n_0 mit

$$-\frac{1}{\alpha'_{n+1}} > 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

zusammen mit $\alpha_{n+1} > 1$, ist somit α_{n+1} reduziert für alle $n \geq n_0$.

<u>Satz 2 (Lagrange)</u>: Jede quadr. Irrationalzahl $\alpha \in \mathbb{R}$ hat periodische Kettenbruchentwicklung (Umkehrung gilt nach Euler: F1) *)

<u>Bew.</u> $\exists n_0$: α_n reduziert für jedes $n \geq n_0$ (Lemma 3).
Alle α_n haben gleiche Diskriminante D wie α (Lemma 1).
Nach Lemma 2 gibt es aber nur endlich viele reduzierte quadr. Irrat'n mit Diskriminante D. Folglich gibt es

$$n_2 > n_1 \geq n_0 \quad \text{mit} \quad \alpha_{n_2} = \alpha_{n_1} . \quad \text{Sei } n_2 = n_1 + k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\alpha_{n_1+k} = \alpha_{n_1} = [q_{n_1}; q_{n_1+1}, \dots]$$
$$\|$$
$$[q_{n_1+k}; q_{n_1+k+1}, \dots] \quad , \quad \xRightarrow{\text{Eindeutigkeit der Kettenbruchentw.}}$$

$q_{m+k} = q_m$ für alle $m \geq n_1$, d.h. die Kettenbruchentw. von α ist periodisch.

---

*) beachte auch den <u>Zusatz</u> auf S. 147

<u>Zusatz</u>: Eine quadr. Irrationalzahl α ist genau dann <u>reduziert</u>, wenn α eine <u>rein-periodische</u> Kettenbruchentwicklung hat.

<u>Bew.</u> "$\Leftarrow$": Sei $\alpha = [\overline{q_0; q_1, \dots, q_{k-1}}]$. Dann $\alpha = \alpha_k = \alpha_{2k} = \alpha_{3k} = \dots$

Aber α_n für fast alle n reduziert (Lemma 3), also α selbst reduziert.

"$\Rightarrow$":

<u>Vorbem.</u> α reduziert $\Rightarrow$ alle α_n reduziert.

<u>z.z.</u> α_1 reduziert.

Nach Vor. $\alpha > 1$, $-1 < \alpha' < 0$. Es ist

$\alpha = q + \frac{1}{\alpha_1}$ mit $q \in \mathbb{N}$ (wegen $\alpha > 1$) und $\alpha_1 > 1$.

$-\frac{1}{\alpha_1} = q - \alpha$, $\Rightarrow$ $-\frac{1}{\alpha_1'} = q - \alpha' > q \geq 1$, $\Rightarrow$ Beh.

Sei nun α eine reduzierte quadr. Irrat. Alle α_n sind reduziert nach Vorbem., und sie haben gleiche Diskr. wie α (Lemma 1). Nach Lemma 2 gibt es aber nur endl. viele solche quad. Irr'n. $\Rightarrow$

$\alpha_0 = \alpha$.

$\exists\, m \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha_m = \alpha_{m+k} \quad ; \text{ sei } m \text{ minimal gewählt.}$$

<u>z.z.</u> $m = 0$ (Dann $\alpha = \alpha_k$, $\Rightarrow$ Kettenbruchentw. von α ist rein-periodisch)

<u>Ann.</u> $m > 0$. $[q_m; q_{m+1}, \dots] = [q_{m+k}; q_{m+k+1}, \dots]$

$m - 1 \geq 0$ $\qquad q_{n+k} = q_n$ alle $n \geq m$

(1) $\alpha'_{m-1} = q_{m-1} + \frac{1}{\alpha'_m}$, $\Rightarrow$ $[\alpha'_{m-1}]^{-1} = q_{m-1} + [\frac{1}{\alpha'_m}]$

(2) $\alpha'_{m+k-1} = q_{m+k-1} + \frac{1}{\alpha'_{m+k}} = q_{m+k-1} + \frac{1}{\alpha'_m}$, $\Rightarrow$ $[\alpha'_{m+k-1}]^{-1} = q_{m+k-1} + [\frac{1}{\alpha'_m}]$

Es folgt $q_{m-1} = q_{m+k-1}$, $\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow}$ $\alpha'_{m-1} = \alpha'_{m+k-1}$, $\Rightarrow$ $\alpha_{m-1} = \alpha_{m+k-1} = \alpha_{m-1+k}$

W! zur Minimalität von m.