$$(a,b) = (a,r_1) = (r_1,r_2) = \ldots = (r_{n-1},r_n) = (r_n)$$

$$(r_{-1},r_0) = (b,a)$$

$n+1$ Schritte

in $\mathbb{Z}$: $n+1 \leq |a|$, also $\leq |a|$ Schritte

(i.a. wesentlich weniger, siehe u.ä.)

<u>F5:</u> r_n ist ggT von a,b. Es ist

$$r_n = xa + yb \quad \text{mit } x,y \in R,$$

wobei x,y aus (*) rekursiv bestimmbar.

<u>Bem'n:</u> 1) Von neuem erhalten wir für jeden euklidischen Ring also den "Satz vom ggT".

2) Sei $R = \mathbb{Z}$. Verlangen wir $0 \leq r_i$ in (*), so sind $q_0, q_1, \ldots, q_n$ sowie die $r_1, \ldots, r_n$ <u>eindeutig bestimmt.</u>

<u>Bsp. in $\mathbb{Z}$:</u> $a = 84$, $b = 133$

$$\begin{aligned}
133 &= 1 \cdot 84 + 49 \\
84 &= 1 \cdot 49 + 35 \\
r_1 = 49 &= 1 \cdot 35 + 14 \\
r_2 = 35 &= 2 \cdot 14 + 7 \\
r_3 = 14 &= 2 \cdot 7
\end{aligned}$$

Somit $\underline{n=4, \quad r_4 = 7}$

Also $(133,84) = (7)$. Wie gesagt schreiben wir auch $(133,84) = 7$.

$$7 = 1\cdot 35 - 2\cdot 14 = 1\cdot 35 - 2(1\cdot 49 - 1\cdot 35) = 3\cdot 35 - 2\cdot 49 =$$
$$3(84 - 1\cdot 49) - 2\cdot 49 = 3\cdot 84 - 5\cdot 49 = 3\cdot 84 - 5(133 - 1\cdot 84) =$$
$$8\cdot 84 - 5\cdot 133, \text{ also}$$

$$7 = 8\cdot 84 - 5\cdot 133$$

Also $\underline{7 = x\,84 + y\,133 \quad \text{für } x = 8,\ y = -5.}$

weiteres Bsp.

$68 = 527 - 3\cdot 153$
$102 = 714 - 4\cdot 153$, etc.

$$(153, 527, 714) \overset{(U)}{=} (153, 68, 102) \overset{(U)}{=} (68, 17, 34) = (17, 0, 0) = (17)$$

$(*)$ $17 = x\,153 + y\,527 + z\,714$ lösbar mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

$(153, 527, 714) = 17\,(9, 31, 42)$

Sdann $(9,31) = 1$

$1 = x\cdot 9 + y\,31 + z\,42$ mit $z = 0$ lösbar

$1 = 7\cdot 9 - 2\cdot 31$

$x = 7,\ y = -2,\ z = 0$ ist eine Lösung $\overset{\text{von }(*)}{}$. Es gibt unendlich viele!
(vgl. Aufgabe 11)

Eukl. Algorithmus für a, b o.E. $a > 0$ (b bel.)
wie folgt aufschreiben:

$\ulcorner q_0 \in \mathbb{Z} \lrcorner$

$$\frac{b}{a} = q_0 + \frac{r_1}{a}, \quad q_0 = \left[\frac{b}{a}\right], \quad 0 < \frac{r_1}{a} < 1 \quad (\text{falls } r_1 \neq 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{r_1} > 1$$

$$\frac{a}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}, \quad q_1 = \left[\frac{a}{r_1}\right]$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n$$

(beachte: $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$, $q_n \geq 2$ im Falle $n \geq 1$)

zusammengefaßt:

$$\frac{b}{a} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

"Kettenbruch(entwicklung) von $\frac{b}{a}$"

In unserem obigen Beispiel

$$\frac{133}{84} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

$q_0 = 1 \quad q_1 = 1 \quad q_2 = 1 \quad q_3 = 2 \quad q_4 = 2$

Näherungsbrüche: $1 = \frac{1}{1}$, $1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$, $1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$

$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{8}{5}$, $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{12} = \frac{133}{84}$

Näherungsbrüche: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{19}{12} = \frac{133}{84}$

$\left|\frac{133}{84} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{19}{12} - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{12}$ gute Approximation durch Brüche mit kleinem Nenner!

Statt einer rationalen Zahl $\alpha = \frac{b}{a}$ sei jetzt α allgemeiner eine beliebige reelle Zahl.

$\alpha = \underset{\substack{\| \\ q_0}}{[\alpha]} + \varepsilon \qquad 0 \le \varepsilon < 1$. Falls $\alpha \notin \mathbb{Z}$, d.h. $\varepsilon > 0$, setze $\rho_1 := \frac{1}{\varepsilon}$. Dann

$\alpha = q_0 + \frac{1}{\rho_1}$ mit $\rho_1 > 1$. Falls $\rho_1 \notin \mathbb{Z}$, so

$\rho_1 = \underset{\substack{\| \\ q_1}}{[\rho_1]} + \frac{1}{\rho_2}$ mit $\rho_2 > 1$ u.s.w.

$\vdots$

[falls $\rho \notin \mathbb{Z}$] $\rho_k = \underset{\substack{\| \\ [\rho_k]}}{q_k} + \frac{1}{\rho_{k+1}}$ mit $\rho_{k+1} > 1$

Abbrechen, wenn $\rho_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Sonst weiter. Jedenfalls:

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_k + \frac{1}{\rho_{k+1}}}}}$$

*) später: $q_0, \dots, q_n$ ganze Zahlen (aber wir brauchen Freiheit für geeigneten Kalkül)

Def. 4 1) $q_0, q_1, \dots, q_n$ seien reelle Zahlen*) mit $q_1, \dots, q_n > 0$.
Unter dem endlichen Kettenbruch

(1) $[q_0; q_1, \dots, q_n]$ $\qquad$ $(n+1)$-gliedriger Kettenbruch

mit den "Teilquotienten" q_i verstehen wir sowohl das $(n+1)$-Tupel

$$(q_0, q_1, \dots, q_n)$$

als auch seinen wiefolgt definierten Wert:

(2) $$[q_0; q_1, \dots, q_n] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

Für $0 \leq k \leq n$ nennen wir den Kettenbruch

(3) $$\rho_k := [q_k; q_{k+1}, \dots, q_n] \qquad (0 \leq k \leq n)$$

den k-ten Rest des Kettenbruches (1).

$$\rho_0 = [q_0; q_1, \dots, q_n], \quad \rho_1 = [q_1; q_2, \dots, q_n], \quad \dots, \quad \rho_n = [q_n]$$

Für den Wert (2) des Kettenbruches (1) gilt

(4) $$[q_0; q_1, \dots, q_n] = [q_0; q_1, \dots, q_{k-1}, \rho_k] \quad \text{für } 0 \leq k \leq n$$

[Sollte man nicht verstehen, was mit der rechten Seite von (2) gemeint ist, so beachte:]
Man kann den Wert (2) des Kettenbruchs (1) durch (4) mit (3) rekursiv definieren: Es ist

$$[q_0] = q_0 \quad , \quad [q_0; q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1} \quad , \text{ also}$$

(5) $$[q_0; q_1, \dots, q_n] = [q_0; \rho_1] = q_0 + \frac{1}{\rho_1} \qquad \text{für } n \geq 1$$

(Per Rekursion ist $\rho_1 > 0$!) $\qquad$ Oder auch:

$$\underbrace{[q_0; q_1, \dots, q_n]}_{(n+1)\text{-gliedrig}} \overset{(4)}{=} [q_0; q_1, \dots, q_{n-2}, \rho_{n-1}] = \underbrace{[q_0; q_1, \dots, q_{n-2}, q_{n-1} + \tfrac{1}{q_n}]}_{n\text{-gliedrig}}$$

(Fortsetzung von Def. 4)

2) Gegeben sei Folge $(q_k)_{k\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ mit $q_k > 0$ für $k \geq 1$.

Unter dem (unendlichen) Kettenbruch

(6) $\quad [q_0; q_1, q_2, \ldots\ldots]$

verstehen wir die Folge der

(7) $\quad [q_0; q_1, \ldots, q_n] \qquad n = 0,1,2,\ldots$

Falls diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert, so bezeichnen wir auch deren Limes mit $[q_0; q_1, q_2, \ldots]$.

(vgl. die Bez. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bei unendlichen Summen)

Der (unendliche) Kettenbruch

(8) $\quad \rho_k := [q_k; q_{k+1}, \ldots\ldots] \qquad k = 0,1,2,\ldots$

heißt der k-te Rest von (6). Formal gilt

(9) $\quad [q_0; q_1, q_2, \ldots] = [q_0; q_1, \ldots, q_{k-1}, \rho_k]$

Später werden wir sehen, daß (9) auch für die Werte der entspr. Kettenbrüche gilt, wenn (8) konvergiert.

Def. 5: Jedem endlichen Kettenbruch $[q_0; q_1, \ldots, q_k]$ ordnen wir rekursiv ein Paar $\binom{c}{d} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ reeller Zahlen zu mit

(10) $\quad [q_0; q_1, \ldots, q_k] = \frac{c}{d} \qquad (d > 0)$

k=0: Für $[q_0]$ sei $\binom{c}{d} = \binom{q_0}{1}$. Es gilt dann in der Tat

$$[q_0] = q_0 = \frac{q_0}{1}$$

$k \geq 1$: Zuerst Motivation (Heuristik):

(11) $[q_0; q_1, \cdots, q_k] = [q_0; \varrho_1] = q_0 + \frac{1}{\varrho_1}$ mit

$\varrho_1 = [q_1; q_2, \cdots, q_k]$. Gehöre $\binom{c'}{d'}$ zu ϱ_1. Dann gilt

$[q_0; q_1, \cdots, q_k] = q_0 + \frac{d'}{c'} = \frac{q_0 c' + d'}{c'}$ *)

*) Wegen $\varrho_1 > 0$ und $d' > 0$ ist $c' > 0$

Wir ordnen nun also $[q_0; q_1, \cdots, q_k]$ das Tupel

(12) $$\binom{c}{d} = \binom{q_0 c' + d'}{c'} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: M_1 \text{ 2x2-Matrix}} \binom{c'}{d'}$$

zu. Dann gilt (10).

Sei jetzt

(13) $[q_0; q_1, \cdots]$ ein endlicher oder unendlicher Kettenbruch.

Das dem k-ten Abschnitt

(14) $[q_0; q_1, \cdots, q_k]$ $\qquad 0 \leq k$

von (13) zugeordnete 2-Tupel

(15) $$\binom{c_k}{d_k}$$

heißt der k-te Näherungsbruch von (13). Auch $\frac{c_k}{d_k}$ heißt k-ter Näherungsbruch von (13). Ist (13) der endliche Kettenbruch $[q_0; q_1, \cdots, q_n]$, so ist der n-te Näherungsbruch $\frac{c_n}{d_n}$ gleich dem Wert dieses Kettenbruchs. Allgemein ist $\frac{c_k}{d_k}$ der Wert des Kettenbruchs (14). Aus formalen Gründen definieren wir noch

(16) $$\binom{c_{-1}}{d_{-1}} = \binom{1}{0}, \qquad \binom{c_{-2}}{d_{-2}} = \binom{0}{1}$$

F6 (Rekursionsformeln für Näherungsbrüche): Bez. wie oben.

Dann gilt

(17) $$\boxed{\begin{aligned} c_k &= q_k c_{k-1} + c_{k-2} \\ d_k &= q_k d_{k-1} + d_{k-2} \end{aligned}}$$ $k = 0,1,2,\dots$ ⌜$\le n$ bei endl. Kettenbruch⌟

$c_0 = q_0$, $d_0 = 1$ siehe oben ⌜Def. 5⌟ $\quad c_{-1} = 1$, $d_{-1} = 0$, $c_{-2} = 0$, $d_{-2} = 1$ siehe (16)

Dies schreiben wir auch in Matrizenform:

(18) $$\begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{k-1} & c_{k-2} \\ d_{k-1} & d_{k-2} \end{pmatrix}}_{M_k} \begin{pmatrix} q_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bem. $d_k > 0$ für $k \ge 0$ (vgl. Def. 5, oder auch (17)).

Bew. Wir setzen

(19) $M_i := \begin{pmatrix} c_{i-1} & c_{i-2} \\ d_{i-1} & d_{i-2} \end{pmatrix}$ für $i = 0,1,2,\dots$, also $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix, und

(20) $M_1 = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Es gilt $\begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also (18) für $k=0$ richtig.

Vorbereitung für die Rekursion: Es habe

(21) $[q_1; q_2, \dots, q_n]$ die Näherungsbrüche $\begin{pmatrix} c_i' \\ d_i' \end{pmatrix}$ mit $-2 \le i \le n-1$ $(n \ge 1)$

Dann gilt aufgrund von Definition 5 (vgl. insb. (12))

(22) $$\begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} \begin{pmatrix} c_{i-1}' \\ d_{i-1}' \end{pmatrix} \quad \text{für } i \ge -1$$

⌜auch für $i=0$ und $i=-1$!⌟