Nun also <u>Induktionsschritt</u>: Sei $k \geq 1$ und Beh. für $k-1$ richtig.

[k-gliedrig] Denn gilt für den Kettenbruch (21) mit $n=k$ nach Induktionsannahme:

$$(23) \qquad \begin{pmatrix} c'_{k-1} \\ d'_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'_{k-2} & c'_{k-3} \\ d'_{k-2} & d'_{k-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

[(k+1)-gliedrig] Wir wollen zeigen, daß (18) für den Kettenbruch (14) gilt.

Nach (22) für $i=k$ ist nun

$$\begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_{k-1} \\ d'_{k-1} \end{pmatrix} \overset{(23)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=M_1} \begin{pmatrix} c'_{k-2} & c'_{k-3} \\ d'_{k-2} & d'_{k-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\left(M_1 \begin{pmatrix} c'_{k-2} \\ d'_{k-2} \end{pmatrix}, \; M_1 \begin{pmatrix} c'_{k-3} \\ d'_{k-3} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \| & & \| \\ \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ d_{k-1} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} c_{k-2} \\ d_{k-2} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

nach (22) für $i=k-1$ bzw. $i=k-2$

also $\begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{k-1} & c_{k-2} \\ d_{k-1} & d_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. (18).

<u>F7:</u> Mit den obigen Bez'en gilt:

(i) $\quad M_{k+1} = M_k \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, also $\qquad k=0,1,2,\dots$

(ii) $\quad M_{k+1} = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ferner:

(iii) $\quad d_k c_{k-1} - c_k d_{k-2} = (-1)^k \quad$ für $k \geq -1$

(iv) $\quad \dfrac{c_{k-1}}{d_{k-1}} - \dfrac{c_k}{d_k} = \dfrac{(-1)^k}{d_k d_{k-1}} \quad$ für $k \geq 1 \qquad$ [$d_{-1}=0$]

(v) $\quad d_k c_{k-2} - c_k d_{k-2} = (-1)^{k-1} q_k \quad$ für $k \geq 0$

(vi) $\quad \dfrac{c_{k-2}}{d_{k-2}} - \dfrac{c_k}{d_k} = \dfrac{(-1)^{k-1} q_k}{d_k d_{k-2}} \quad$ für $k \geq 0$, aber $k \neq 1$

[$d_k d_{-1} = 0$]

Bew.

$$M_k\begin{pmatrix}q_k&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{k-1}&c_{k-2}\\d_{k-1}&d_{k-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_k&1\\1&0\end{pmatrix} \overset{(17)}{=} \begin{pmatrix}c_k&c_{k-1}\\d_k&d_{k-1}\end{pmatrix} = M_{k+1}$$

für $k=0,1,\dots$; $M_0 = E$, also rekursiv (ii).

$M_0 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\det(M_{k+1})}_{=\,c_k d_{k-1} - c_{k-1} d_k} \overset{(ii)}{=} \underbrace{\det\begin{pmatrix}q_0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{=\,-1} \cdots \underbrace{\det\begin{pmatrix}q_k&1\\1&0\end{pmatrix}}_{=\,-1} = (-1)^{k+1} \quad \text{für } k\geq 0,$$

auch für $k=-1$

Sonst (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv)✓, (v) $\Rightarrow$ (vi)✓

*) Det.regel

(v):
$$-(d_k c_{k-2} - c_k d_{k-2}) = \begin{vmatrix}c_k & c_{k-2}\\ d_k & d_{k-2}\end{vmatrix} \overset{(17)}{=} \begin{vmatrix}q_k c_{k-1} + c_{k-2} & c_{k-2}\\ q_k d_{k-1} + d_{k-2} & d_{k-2}\end{vmatrix} \overset{*)}{=}$$

$$\begin{vmatrix}q_k c_{k-1} & c_{k-2}\\ q_k d_{k-1} & d_{k-2}\end{vmatrix} \overset{*)}{=} q_k \begin{vmatrix}c_{k-1} & c_{k-2}\\ d_{k-1} & d_{k-2}\end{vmatrix} = q_k \det(M_k) \overset{\text{s.o.}}{=}$$

$$q_k(-1)^k = -q_k(-1)^{k-1}, \quad \Rightarrow \text{Beh.}$$

F8: (i) $\left(\frac{c_{2m}}{d_{2m}}\right)_{m\geq 0}$ ist streng monoton wachsend

(ii) $\left(\frac{c_{2m+1}}{d_{2m+1}}\right)_{m\geq 0}$ ist streng monoton fallend

(iii) $\frac{c_{2m}}{d_{2m}} < \frac{c_{2n+1}}{d_{2n+1}}$ für alle $m\geq 0, n\geq 0$

Bew. (i) und (ii) folgen aus F7(vi). ⌜beachte $q_k > 0$ für $k\geq 1$,
$d_k > 0$ für $k \geq 0$⌟

(iii): 1) Beh. stimmt für $m=n\geq 0$ nach F7(iv) ⌜$k=2n+1$⌟

2) Wegen (i) und (ii) stimmt es daher für alle $m\geq 0, n\geq 0$:

Für $m\leq n$ ist $\frac{c_{2m}}{d_{2m}} \overset{(i)}{\leq} \frac{c_{2n}}{d_{2n}} \overset{1)}{<} \frac{c_{2n+1}}{d_{2n+1}}$.

Für $m\geq n$ ist $\frac{c_{2n+1}}{d_{2n+1}} \overset{(ii)}{\geq} \frac{c_{2m+1}}{d_{2m+1}} \overset{1)}{>} \frac{c_{2m}}{d_{2m}}$.

F9: Bez. wie oben.

(i) $[q_0; q_1, \dots, q_n] = \dfrac{\rho_k c_{k-1} + c_{k-2}}{\rho_k d_{k-1} + d_{k-2}}$ für $1 \le k \le n$

Nenner > 0 ! ⌜denn $\rho_k > 0$, $d_{k-1} > 0$, $d_{k-2} \ge 0$⌟

(ii) $[q_k; q_{k-1}, \dots, q_1] = \dfrac{d_k}{d_{k-1}}$ für $k \ge 1$

Bew. (i): $[q_0; q_1, \dots, q_n] \overset{(4)}{=} [q_0; q_1, \dots, q_{k-1}, \rho_k] \overset{(17)}{=}$

$$\frac{\rho_k c_{k-1} + c_{k-2}}{\rho_k d_{k-1} + d_{k-2}}$$

(ii): $$M'_k = \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c'_{k-1} & c'_{k-2} \\ d'_{k-1} & d'_{k-2} \end{pmatrix} = {}^t\left(\begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{F7(ii)}{=} {}^t\left(\begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} M_{k+1}\right)$$

⌜$\det\begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$⌟ $$= {}^t\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_k & c_{k-1} \\ d_k & d_{k-1} \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} d_k & d_{k-1} \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_k & * \\ d_{k-1} & * \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow [q_k; q_{k-1}, \dots, q_1] = \frac{c'_{k-1}}{d'_{k-1}} = \frac{d_k}{d_{k-1}} \qquad \text{q.e.d.}$$

F10: Gegeben sei ein unendlicher Kettenbruch

(24) $$\alpha = [q_0; q_1, \dots\dots].$$

Dann gelten:

(i) α konvergent $\Longrightarrow$ jeder Rest $\rho_n = [q_n; q_{n+1}, \dots]$ konvergent

(ii) Ein ρ_n konvergent $\Longrightarrow$ α konvergent

(iii) Ist α konvergent, so hat man für die Werte

(*) $$\alpha = \frac{c_{n-1}\rho_n + c_{n-2}}{d_{n-1}\rho_n + d_{n-2}} \qquad n = 1, 2, \dots \qquad (\text{Nenner} > 0)$$

d.h. $[q_0; q_1 \dots\dots] = [q_0; q_1, \dots, q_{n-1}, \rho_n]$

✓ Ist α konvergent, so gilt: (iv) ✓ $\dfrac{c_{2n}}{d_{2n}} < \alpha < \dfrac{c_{2m+1}}{d_{2m+1}}$ für alle $n, m \ge 0$.

Bew.

$k=0,1,2,\dots$ (25) $\frac{c_{n+k}}{d_{n+k}} = [q_0; q_1, \dots, q_{n+k}] \overset{F9}{=} \frac{c_{n-1}\frac{c_k'}{d_k'} + c_{n-2}}{d_{n-1}\frac{c_k'}{d_k'} + d_{n-2}}$, wobei

$\ulcorner n \geq 1 \lrcorner$ $[q_n; q_{n+1}, \dots, q_{n+k}] = \frac{c_k'}{d_k'}$ k-ter Näherungsbruch von ϱ_n

Sei ϱ_n konvergent, d.h. $\frac{c_k'}{d_k'} \longrightarrow \overset{\text{Wert von } \varrho_n}{\varrho_n}$ für $k \to \infty$.

$\overset{(25)}{\Longrightarrow}$ $\frac{c_{n+k}}{d_{n+k}} \longrightarrow \frac{c_{n-1}\varrho_n + c_{n-2}}{d_{n-1}\varrho_n + d_{n-2}}$ für $k\to\infty$, also α konvergent

mit dem Wert (*). Nenner > 0, da $\varrho_n > 0$ ⌜denn nach F8 (i) ist $0 < \frac{q_n}{1} = \frac{c_0'}{d_0'} < \varrho_n$ ⌟

Umgekehrt: Sei α konvergent. Löse (25) nach $\frac{c_k'}{d_k'}$ auf. Wir sehen dann sofort *): $\frac{c_k'}{d_k'}$ konvergiert, d.h. ϱ_n ist konvergenter Kettenbruch.

Damit (i)–(iii) bewiesen. (iv) ist klar nach F8.

*) Kleiner Betrug? Also doch lieber Kontrolle: Auflösung ergibt

(25') $\frac{c_k'}{d_k'} = -\frac{d_{n-2}\frac{c_{n+k}}{d_{n+k}} - c_{n-2}}{d_{n-1}\frac{c_{n+k}}{d_{n+k}} - c_{n-1}}$, ausgenommen der

Fall, daß der Nenner $=0$ ist, d.h. $\frac{c_{n+k}}{d_{n+k}} = \frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}$ gilt. Das ist aber unmöglich, vgl. F8.

Zähler bzw. Nenner in (25') gehen für $k\to\infty$ gegen $d_{n-2}\alpha - c_{n-2}$ bzw. $d_{n-1}\alpha - c_{n-1}$. Nenner $d_{n-1}\alpha - c_{n-1} = 0$ ist unmöglich, da sonst $\alpha = \frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}$, wieder im Widerspruch zu F8.

Jetzt klar, daß $\frac{c_k'}{d_k'}$ konvergiert.

<u>F11:</u> Der Wert α eines konvergenten <u>unendlichen</u> Kettenbruches genügt den Ungleichungen

(26) $$\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| < \frac{1}{d_k d_{k+1}} \qquad \text{für jedes } k \geq 0$$

<u>Bew:</u> Nach F7(iv) ist

(27) $$\left|\frac{c_k}{d_k} - \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}}{d_{k+1} d_k}\right| = \frac{1}{d_k d_{k+1}}$$

Nach F10(iv) liegt α <u>echt</u> zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen ⌜falls k gerade: $\frac{c_k}{d_k} \quad \alpha \quad \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$; falls k ungerade: $\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}} \quad \alpha \quad \frac{c_k}{d_k}$ ⌟

Daher folgt mit (27) die Behauptung.

---

(26) ist interessant, falls $c_k, d_k \in \mathbb{Z}$. Approximation der reellen Zahl α durch rationale Zahlen.

<u>Def.</u> Ein Kettenbruch $[q_0; q_1, \dots]$ – endlich oder unendlich – heißt <u>natürlicher Kettenbruch</u>, wenn

$q_k \in \mathbb{Z}$ für alle $k \geq 0$ ($q_k > 0$ für $k \geq 1$ nach Voraus! also $q_k \in \mathbb{N}$ für $k \geq 1$)

Im weiteren betrachten wir nur natürliche Kettenbrüche (und sprechen dann schlechthin von <u>Kettenbrüchen</u>). Nach F6 ist dann

⌜$d_0 = 1$⌟ $c_k, d_k \in \mathbb{Z}$ für alle $k \geq -2$, $d_k \in \mathbb{N}$ für $k \geq 0$ ⌜$d_{-1} = 0$⌟

$$d_k \overset{F6}{=} q_k d_{k-1} + d_{k-2} \geq d_{k-1} + 1 > d_{k-1} \quad \text{für } k \geq 2$$

(28) $$d_k > d_{k-1} \text{ für } k \geq 2, \quad d_k \geq k \text{ für } k \geq 1$$

⌜(28) gilt i.a. nicht für $k=1$. Denn $d_0 = 1$, und es ist $d_1 = 1$ möglich, vgl. obiges Beispiel auf S. 29⌟

Bem. Induktiv folgt leicht (ÜA):

$$d_k > 2^{\frac{k-1}{2}} \quad \text{für } k \geq 2$$

F12: Jeder unendliche (natürliche) Kettenbruch ist konvergent.

Bew. $[q_0; q_1, \dots, q_m] = \frac{c_m}{d_m}$ z.z. $\left(\frac{c_m}{d_m}\right)_m$ konvergiert.

① $\left(\frac{c_{2n+1}}{d_{2n+1}}\right)_n$ monoton fallend *)

② $\left(\frac{c_{2n}}{d_{2n}}\right)_n$ monoton wachsend *)

③ $$\frac{c_{2n}}{d_{2n}} < \frac{c_{2n+1}}{d_{2n+1}} \quad ^{*)}$$ *) nach F8

④ $$\frac{c_{2n+1}}{d_{2n+1}} - \frac{c_{2n}}{d_{2n}} \overset{(27)}{=} \frac{1}{d_{2n}d_{2n+1}} \overset{(28)}{\leq} \frac{1}{2n(2n+1)} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Wir haben also eine klassische Intervallschachtelung. Daher existiert (genau) ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\beta \in \left] \frac{c_{2n}}{d_{2n}}, \frac{c_{2n+1}}{d_{2n+1}} \right[\text{ für alle } n, \text{ und es gilt}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_{2n}}{d_{2n}} = \beta = \lim_{n \to \infty} \frac{c_{2n+1}}{d_{2n+1}}.$$ Es folgt

$$\lim_{m \to \infty} \frac{c_m}{d_m} = \beta.$$

F13: Die Näherungsbrüche eines (nat.) Kettenbruches lassen sich nicht kürzen, d.h.

c_k, d_k sind teilerfremd für jedes $k \geq -2$

$\left[\frac{1}{0} = \infty\right]$ [Wir können also wirklich identifizieren: $\binom{c_k}{d_k} = \frac{c_k}{d_k}$]

Bew. $d_k c_{k-1} - c_k d_{k-1} = (-1)^k$ für $k \geq -1$ (nach F7(iii)), $\Rightarrow$

$(c_{k-1}, d_{k-1}) = 1$ für $k \geq -1$, $\Rightarrow$ Beh.

F14: Jede rationale Zahl ist durch einen <u>endlichen</u> (nat.) Kettenbruch darstellbar.

<u>Bew.</u> $\alpha = \frac{b}{a}$, $a>0$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}$

Führe Eukl. Algorithmus durch. Die auftretenden "Quotienten" seien $q_0, q_1, \dots, q_n$. Im Falle $\alpha \in \mathbb{Z}$ ist $\alpha = [q_0]$ mit $q_0 = \alpha$. Für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ist

$$\alpha = [q_0; q_1, \dots, q_n]$$

mit $n \geq 1$, $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}$, $q_n = \frac{r_{n-1}}{r_n} \geq 2$.

⌜vgl. S.28⌟ (siehe oben, war unsere Motivation, Kettenbrüche zu betrachten.)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wie oben (vor Def. 4) erhalten wir (evtl. endliche) Systeme

$$\underset{\mathbb{Z}}{\overset{\cap}{q_0}}, \underset{\mathbb{N}}{\overset{\cap}{q_1}}, \dots, \underset{\mathbb{N}}{\overset{\cap}{q_{n-1}}}, \dots \qquad \text{bzw.} \quad \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots \qquad \rho_k > 1$$

⌜$q_0 = [\alpha]$, $\quad \alpha = [\alpha] + \frac{1}{\rho_1}$, falls $\alpha \notin \mathbb{Z}$⌟

⌜$\rho_0 = \alpha$⌟ (29) $\quad \rho_k = q_k + \frac{1}{\rho_{k+1}}$, falls $\rho_k \notin \mathbb{Z}$ $\quad$ ⌜$0 \leq k \leq n-1$⌟

(30) $\quad \alpha = [q_0; q_1, \dots, q_{n-1}, \rho_n]$

Wir erhalten so einen endlichen oder unendlichen (nat.) Kettenbruch

(31) $\quad [q_0; q_1, \dots, \overset{\rho_n}{q_n}]$ bzw. $[q_0; q_1, q_2, \dots]$,

<u>die Kettenbruchentwicklung von α</u>. Nach (29):

1) $\alpha \in \mathbb{Q} \implies \rho_k \in \mathbb{Q}$

2) $\alpha \notin \mathbb{Q} \implies \rho_k \notin \mathbb{Q}$, die Kettenbruchentw. von α bricht <u>nicht</u> ab.