Stichworte: Bekannte Angriffe auf das DL-Problem bei speziellen elliptischen Kurven, supersinguläre/anomale Kurven, Vergleich mit Konventionellen Kryptoverfahren

§4 Sichere Kryptographie mit elliptischen Kurven

§4.1 Bekannte Angriffe auf das DL-Problem: Überblick

1.) Die Sicherheit des ElGamal- und ECDSA-Verfahrens beruht hier auf der Schwierigkeit des DL-Problems auf elliptischen Kurven. Allerdings gibt es bestimmte Arten elliptischer Kurven, bei denen das DL-Problem algorithmisch schnell lösbar ist, so dass sich diese Kurven als kryptographisch schwach bzw. ungeeignet erweisen. Auch die Wahl eines Punktes P mit großer Ordnung ist wichtig.

4.1.1 BSGS und Silver-Pohlig-Hellman

Diese beiden Methoden eignen sich zur Lösung des DL-Problems in einer beliebigen abelschen Gruppe G.

2.) DL-Problem in G: Geg. sei $P \in G$ mit $\operatorname{ord}(P) = n \in \mathbb{N}$, sowie $Q \in \langle P \rangle$.
Gesucht ist $k \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $kP = Q$.

3.) BSGS (= "Baby steps giant steps"): Dieses Verfahren kommt in Frage, wenn P kleine Ordnung n hat. Dann kann das DL-Problem wie folgt gelöst werden; der Algorithmus hat einen Zeit- und Platzbedarf der Größenordnung $O(\sqrt{n})$:

4.) Vorüberlegung:
Sei $m = \lceil \sqrt{n} \rceil = \min\{\ell \in \mathbb{N};\ \ell \geq \sqrt{n}\}$,
schreibe $k = qm + r$, $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ (Div. mit Rest)
Ziel: Bestimme q, r.
Da $Q = kP = qmP + rP$, folgt $\underbrace{Q - rP}_{\text{"Babystep"}} = \underbrace{qmP}_{\text{"Giant step"}}$.

5.) Idee: Berechne alle möglichen Werte der l.S. = "Babystep" und nach und nach die möglichen Werte der r.S. = "Giant step". Trifft man auf eine Übereinstimmung, sind r und m gefunden.

6.) 1. Schritt: Berechne die Liste der "Babysteps" $B = \{(Q - rP, r) : 0 \le r \le m\}$.

7.) 2. Schritt:
- Ist für eines der r die Glg. $Q - rP = \mathcal{O}$ erfüllt, ist $k = r$. ✓
- Sonst teste für den ersten "Giantstep" $R = mP$, ob R in der Babystepliste B schon vorkommt. Falls ja: $k = m + r$. ✓
- Teste so alle "Giantsteps" $2R, 3R, 4R, \dots, (m-1)R$, ob diese in B vorkommt, wennja, gibt die 2. Komponente r mit $k = qm + r$. ✓

8.) Silver-Pohlig-Hellman-Verfahren:
Dieses Verfahren löst das DL-Problem in einer abelschen Gruppe G, wenn die Ordnung $n = \operatorname{ord}(P)$ aus nur kleinen Primfaktoren p_i zusammengesetzt, d.h. glatt ist.

9.) Def.: Sei $B \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann heißt $n \in \mathbb{N}$ B-glatt, falls $\forall p \mid n : p \le B$.

10.) Die Bestimmung von k in $\langle P \rangle$ wird auf Untergruppen von $\langle P \rangle$ der Ordnungen $p_i \mid n$ zurückgeführt.

Sei $\operatorname{ord}(P) = n = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\lambda_i}$ mit $p_1, \dots, p_t$ p.w.v. prim, $\lambda_i \in \mathbb{N}$.

Der Algorithmus hat dann eine Laufzeit von $\mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{t} (\lambda_i (\log n + \sqrt{p_i}))\right)$.

11.) Vorüberlegung:
- Zur Bestimmung von k mit $kP = Q \in \langle P \rangle$ berechnen wir alle Restklassen $k \bmod p_1^{\lambda_1}$, $k \bmod p_2^{\lambda_2}$, …, $k \bmod p_t^{\lambda_t}$. Denn laut CRS ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{\lambda_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_t^{\lambda_t}\mathbb{Z}$, so dass damit dann auch die Restklasse von $k \bmod n$ bestimmt werden kann.
- Betr. daher jedes $p = p_i$, $\lambda = \lambda_i$ mit $1 \le i \le t$.
  Gesucht: $z \in \{0, \dots, p^\lambda - 1\}$ mit $z \equiv k \bmod p^\lambda$. $(\rightsquigarrow z \equiv k \equiv z_0 \ (p))$

Schreibe $z = z_0 + z_1 p + \dots + z_{\lambda-1} p^{\lambda-1}$, die $z_i \in \{0, \dots, p-1\}$, in der p-adischen Entwicklung; bestimme die $z_0, \dots, z_{\lambda-1}$.

12.) 1. Schritt: Sei $R := \frac{n}{p} \cdot P$, dann ist $\frac{n}{p} Q = \frac{n}{p} kP = kR$ und $pR = \mathcal{O}$.
Also ist $kR = zR = z_0 R$, d.h. $z_0 R = \frac{n}{p} \cdot Q$.
Somit muss man in der Untergruppe $\langle R \rangle$ der (kleinen) Ordnung p ein DL-Problem lösen, um z_0 zu bestimmen – etwa mit BSGS.

13) 2. Schritt: Seien $z_0, \dots, z_{j-1}$ schon (rekursiv) bestimmt, wo $j \leq \lambda - 1$ ist.
Berechne dann $Q_j := \frac{n}{p^{\lambda+1}} \left(Q - (z_0 + z_1 p + \dots + z_{j-1} p^{j-1}) P \right)$.
Da $nP = \mathcal{O}$, ist $\frac{n}{p^{\lambda+1}} \cdot p^\lambda P = \mathcal{O}$, da $z \equiv k \bmod p^\lambda$ ist $k = z + s p^\lambda$, $s \in \mathbb{Z}$,

$$\text{also } \frac{n}{p^{\lambda+1}} Q = \frac{n}{p^{\lambda+1}} kP = \frac{n}{p^{\lambda+1}} zP + \underbrace{\frac{n}{p^{\lambda+1}} \cdot s p^\lambda P}_{=\mathcal{O}} = \frac{n}{p^{\lambda+1}} zP$$

$$\text{und somit } Q_j = \frac{n}{p^{\lambda+1}} (z_j p^j + \dots + z_{\lambda-1} p^{\lambda-1}) P = \frac{n}{p} z_j P = z_j R.$$
$\rightsquigarrow$ Zur Bestimmung von z_j ist wieder ein DL-Problem in der Untergruppe $\langle R \rangle$ der Ordnung p zu lösen – etwa mit BSGS.

14) Bem.: Ist die Gruppenordnung glatt, ist der Algorithmus also sehr schnell.

4.1.2 Pollard-S und Pollard-λ

15) Der Pollard-S-Algorithmus ist von der Laufzeit her vergleichbar mit BSGS, ist aber speicherplatztechnisch günstiger und lässt sich gut parallelisieren. Mit m Prozessoren wird der Algorithmus so um den Faktor m schneller.

16) Der Pollard-λ-Algorithmus ist ähnlich, i.a. eher langsamer als Pollard-S. Er liefert gute Ergebnisse, wenn der diskrete Logarithmus k in einem hinreichend kleinen Intervall liegt. Auch Pollard-λ ist gut parallelisierbar.
(Die genauen Verfahren können in der Fachliteratur nachgeschlagen werden.)

4.1.3 MOV und SSSA

17) Beim MOV-Verfahren [Autoren: Menezes, Okamoto, Vanstone] wird das DL-Problem für eine elliptische Kurve $E(\mathbb{F}_{p^r})$ auf das in der Gruppe $(\mathbb{F}_{p^{rl}}^*, \cdot)$ für ein $l \geq 1$ zurückgeführt. Es ist also speziell nur für elliptische Kurvengruppen konstruiert, nicht für allgemeine abelsche Gruppen. Zeigt sich hier, dass $l \geq 1$ so wählbar ist, dass das DL-Problem in $(\mathbb{F}_{p^{rl}}^*, \cdot)$ leicht, d.h. schnell, zu lösen ist, ist die elliptische Kurve kryptographisch ungeeignet, etwa wenn $n = \operatorname{ord}(P)$ Teiler von $p^{rl} - 1$ ist.

18.) Generell lässt sich das DL-Problem in $(\mathbb{F}_{p^n}^*, \cdot)$ in subexponentieller Zeit schnell lösen (mit sogenannten Indexkalkül-Methoden), so dass Kurven, für die das DL-Problem auf ein schnelles in einem $(\mathbb{F}_{p^{n\ell}}^*, \cdot)$ zurückgeführt werden kann, als kryptographisch schwach bzw. ungeeignet angesehen werden.
Das ist etwa bei supersingulären elliptischen Kurven der Fall, bei denen die Gruppenstruktur recht gut bekannt ist.

19.) **Def.:** Eine elliptische Kurve $E(\mathbb{F}_{p^n})$ heißt supersingulär, falls $p = \mathrm{char}(\mathbb{F}_{p^n})$ die Spur des Frobenius teilt, d.h. $p \mid p^n + 1 - \#E(\mathbb{F}_{p^n})$.

20.) **Bem.:**
- Um zu testen, ob eine Kurve supersingulär und damit kryptographisch ungeeignet ist, muss die Gruppenordnung $\#E(\mathbb{F}_{p^n})$ der elliptischen Kurve bestimmt werden — typischerweise mit dem Schoof-Algorithmus.
- Der Begriff "supersingulär" hat nichts mit singulären Punkten zu tun: elliptische Kurven sind per Definition nicht-singulär.

21.) **Bsp.:** Die Kurve $E(\mathbb{F}_2): y^2 + y = x^3 + x + 1$ ist supersingulär, da $E(\mathbb{F}_2) = \{\mathcal{O}\}$.

22.) **Bem.:** Supersingularität bleibt bei Übergang zu einem Erweiterungskörper erhalten: Ist $E(\mathbb{F}_{p^n})$ supersingulär, dann auch $E(\mathbb{F}_{p^{n\ell}})$ für alle $\ell \geq 1$. [Ohne Bew.]

23.) **1. Kriterium für Supersingularität:** Sei $p \geq 3$, $E(\mathbb{F}_p): y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c =: h(x)$ elliptische Kurve. Dann ist $E(\mathbb{F}_p)$ genau dann supersingulär, wenn der Koeffizient vor T^{p-1} in $h(T)^{\frac{p-1}{2}} \in \mathbb{F}_p[T]$ gleich 0 ist.

24.) **2. Kriterium für Supersingularität:** Sei $p = 2$, $E(\mathbb{F}_{2^n}): y^2 + a_1 xy + y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$.
Dann ist $E(\mathbb{F}_{2^n})$ genau dann supersingulär, wenn $a_1 = 0$. [Ohne Bew.]

25.) **Bsp:** s.o. 21.), und $E(\mathbb{F}_p): y^2 = x^3 + x$ ist für $p \equiv 3 \,(4)$ supersingulär.
[Denn: $(T^3 + T)^{(p-1)/2} = \sum_{j=1}^{(p-1)/2} \binom{(p-1)/2}{j} T^{3j} T^{(p-1)/2 - j}$
mit $\frac{p-1}{2} + 2j = p-1 \iff 2j = \frac{p-1}{2}$, d.h. wenn $2 \mid \frac{p-1}{2} \iff p \equiv 1 \,(4)$
$\rightsquigarrow$ Koeff. vor T^{p-1} ist $\binom{(p-1)/2}{(p-1)/4} \neq 0$ in $\mathbb{F}_p$.
Für $p \equiv 3 \,(4)$ kommt T^{p-1} nicht vor $\rightsquigarrow$ Koeff. $= 0$.]

26.) **Bem.:** Der MOV-Algorithmus nutzt bei einer supersingulären Kurve $E(\mathbb{F}_{p^n})$ aus, dass $t = p^n + 1 - \#E(\mathbb{F}_{p^n})$ nur einen der Werte $t \in \{0, \pm\sqrt{p^n}, \pm\sqrt{2p^n}, \pm\sqrt{3p^n}, \pm 2\sqrt{p^n}\}$ annehmen kann.

27.) Beim SSSA-Verfahren [Autoren: Satoh, Smart, Semaev, Araki] handelt es sich um einen schnellen Algorithmus zur Lösung des DL-Problems auf anomalen elliptischen Kurven, welche deswegen kryptographisch ungeeignet sind. Die Grundidee ist, die elliptische Kurve über $\mathbb{F}_p$ als eine über $\mathbb{Q}_p$ zu betrachten, dem Körper der p-adischen Zahlen, und die Logarithmenberechnung auf eine Division in $\mathbb{Z}_p$ zurückführen (was leicht ist).

28.) Def: Eine elliptische Kurve $E(\mathbb{F}_p)$ heißt anomal, wenn $\#E(\mathbb{F}_p) = p$ ist. Dies lässt sich wieder durch Bestimmung von $\#E(\mathbb{F}_p)$ mit dem Schoof-Algorithmus leicht überprüfen.
Der SSSA-Algorithmus kann auf Kurven über $\mathbb{F}_{p^r}$ übertragen werden. Er hat polynomiale Laufzeit.

4.1.4 Fazit: geeignete elliptische Kurven und Vergleich mit anderen Public-Key-Verfahren

29.) Eine elliptische Kurve $E(\mathbb{F}_p): y^2 = x^3 + ax + b$ mit vorgegebener Bitzahl für p ist leicht zu finden – mit Zufallszahlengenerator und Primzahltest, was auch für große Zahlen mit mehreren hundert Dezimalstellen schnell machbar ist; dafür kennt man ganz gute Algorithmen.

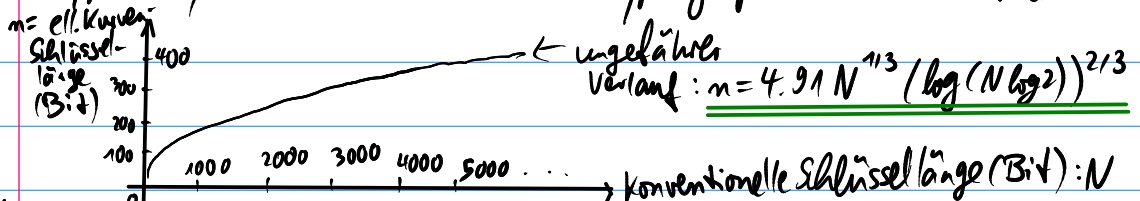
30.) Man wählt solange die Parameter p, a, b neu, bis die Diskriminante $4a^3 + 27b^2$ nicht durch p teilbar ist und somit eine elliptische Kurve vorliegt. Ziemlich sicher liegt dann eine kryptographisch geeignete Kurve vor. Das testet man nach Berechnender Gruppenordnung $\#E(\mathbb{F}_p)$ mit dem Schoof-Algorithmus:

31.) • Ist $\#E(\mathbb{F}_p)$ glatt, d.h. hat $\#E(\mathbb{F}_p)$ nur kleine Primteiler, ist die Kurve ungeeignet wegen Silver-Pohlig-Hellman.
• Ist $\#E(\mathbb{F}_p) = p+1$, d.h. die Kurve supersingulär, ist die Kurve ungeeignet (MOV).
• Ist $\#E(\mathbb{F}_p) = p$, d.h. die Kurve anomal, ist die Kurve ungeeignet (SSSA).
Ob die Kurve supersingulär/anomal ist, kann man meist leicht erkennen durch Wahl von Punkten $P \in E(\mathbb{F}_p)$ und dem Test, ob $(p+1)P = O$ bzw $pP = O$ gilt.

32) Die Wahl eines Punktes P mit nicht zu kleiner Ordnung n muss dann gewährleistet werden. Speziell darf n kein Teiler von $p^{\ell}-1$ sein, wenn das DL-Problem in $(\mathbb{F}_{p^\ell}^*, \cdot)$ leicht zu lösen ist, und n darf auch kein Vielfaches von p sein (wegen SSSA). Auch sollte n nicht glatt sein; man wählt in der Praxis meist Punkte P, für die $n = \mathrm{ord}(P)$ eine hinreichend große Primzahl ist; für sie sollte etwa $n > 2^{160}$ gelten.

33) Die für allgemeine elliptische Kurven, die in diesem Sinne als kryptographisch sicher gelten, bekannte Implementationen des DL-Problems sind alle von exponentieller Komplexität. Ein Kryptographieverfahren wie Elgamal bzw. DSA gilt dann als kryptographisch sicher.

34) Für konventionelle Kryptoverfahren (RSA und Elgamal / DSA auf $(\mathbb{F}_{p^n}^*, \cdot)$) gibt es subexponentielle Verfahren zur Lösung des DL-Problems. Dieser Vergleich schlägt sich in der Wahl der Schlüssellängen (= Bitzahl der Größe des endl. Körpers) nieder: Die Schlüssellänge eines elliptischen Kurven-Systems wächst etwas schneller als die 3. Wurzel der Schlüssellänge eines konventionellen Krypto-Systems mit ähnlicher kryptographischer Sicherheit:



35)
- Man geht davon aus, dass Kurven $E(\mathbb{F}_p)$ mit $p \approx 2^{173}$, wo $\#E(\mathbb{F}_p)$ einen Primteiler $\geq 2^{160}$ hat, die gleiche Sicherheit wie ein RSA-System mit 1024 Bit bietet (für 4096 Bit beim RSA nur etwa 313 bei EC-System!).
- Durch die geringere Schlüssellänge bei Verfahren mit elliptischen Kurven kann man diese leicht auf Smart-Cards ohne Koprozessor implementieren. Solche Smart-Cards sind wesentlich billiger als Chip-Karten mit Koprozessor.

36) Bedenken der elliptische Kurven-Kryptographie:
Die Nichteignung supersingulärer/anomaler Kurven kam schnell und überraschend. Es ist unklar, ob noch weitere ungeeignete Kurvenfamilien existieren und mit einem schnellen DL-Algorithmus angreifbar sind.