Übungsblatt Nr. 1, Besprechung am 8.9.2011

Aufgabe 1:

Gegeben seien folgende deutsche Sätze: "Wer wählen darf, ist volljährig." "Wenn man volljährig und deutscher Staatsbürger ist, darf man wählen." "Wählen dürfen genau die volljährigen deutschen Staatsbürger."
Schreiben Sie die Sätze jeweils formal als Implikation auf (kürzen Sie Teile davon ab als A, B und C), und bilden Sie die formale Kontraposition bzw. Verneinung. Wie formuliert man die Kontraposition bzw. Verneinung wieder als deutschen Satz?

Beispiel 1: Der Satz "Wenn es regnet oder der Gulli überläuft, wird die Straße nass." ist formalisierbar als $(A \vee B) \Rightarrow C$. Die Verneinung ist $\neg((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B)) \wedge \neg C \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg C$ und bedeutet "Es regnet oder der Gulli läuft über, und die Straße bleibt trocken." Die Kontraposition ist $(\neg C \Rightarrow \neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$ und bedeutet "Wenn die Straße trocken bleibt, dann regnet es nicht, und auch der Gulli läuft nicht über."

Aufgabe 2:

Seien A, B und C Aussagen. Formulieren Sie die folgenden Aussagen um in dazu äquivalente, die nur mit $\wedge, \vee$ und $\neg$ auskommen. Verwenden Sie dabei die Logikregeln aus der Vorlesung.

(1) $\neg(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow A$

(2) $\neg(A \Rightarrow B) \wedge C$

(3) $(A \Leftarrow B) \wedge B$

(4) $\neg(A \vee (A \Leftrightarrow B))$

Wie kann man diese Aussagen sprachlich ausdrücken? Wie lauten die Verneinungen dieser Aussagen?

Aufgabe 3:

(Nach der Donnerstag-Vorlesung kann man diese Übung besprechen) Welches Beweisverfahren wird in den folgenden Beweisen benutzt?
(Bem.: Das Zeichen $a|b$ heißt "a teilt b")
Vergleichen Sie die Beweise miteinander: Einmal rein äußerlich, andererseits auch inhaltlich: Wo wird direkt, wo indirekt argumentiert? (Wenn Sie nicht alles inhaltlich verstehen, ist das nicht so schlimm. Sie sollen hier nur sehen, wie man logische Argumentationen "mathematisch" richtig aufschreiben kann.)

Satz 1: Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.
Beweis: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, etwa n, $n+1$, $n+2$, ist $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3\cdot(n+1)$, also durch drei teilbar. $\square$

direkter Beweis

Satz 2: Vor.: a, b, c seien aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
Beh.: $3|a+b+c$.
Bew.: Laut Vor. ist $b = a+1$ und $c = b+1 = (a+1)+1 = a+2$. Dann gilt: $a+b+c = a+(a+1)+(a+2) = 3a+3 = 3\cdot(a+1) \Rightarrow 3|a+b+c$. $\square$

direkter Beweis, etwas formaler

Satz 3: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Beweis: Angenommen, es gäbe nur die endlich vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$. Dann ist die natürliche Zahl $n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_r + 1$ durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ teilbar. Da aber jede natürliche Zahl > 1 durch eine Primzahl (etwa der kleinste Teiler von n, der > 1 ist, vgl. Satz 4) teilbar sein muss, existiert noch eine weitere Primzahl, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

indirekter Beweis, die Annahme lautet: "Es gibt nur endl. viele Primzahlen, $p_1, \ldots, p_r$."

Satz 4: Eine natürliche Zahl n ist durch eine Primzahl teilbar.
Bew.: Sei p der kleinste Teiler > 1, der n teilt. Dann ist p prim, denn wäre p zusammengesetzt aus zwei Faktoren $a, b > 1$, so wäre $a > 1$ ein Teiler von n, der kleiner ist als p, im Widerspruch zur Wahl von p. Also ist p prim. $\square$

direkter Beweis, enthält indirekten (Unter-)Beweis der Behauptung „$p|n$, $p>1$, p minimal $\Rightarrow p$ Primzahl"

Satz 5: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
Bew.: Ann.: $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}$.
Betrachte $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p|n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, $\lightning$. Derselbe Beweis wie bei Satz 3, formaler. $\square$

Bem.: Die Behauptung in Satz 4 ist auch als $\forall n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{P} : p|n$ schreibbar.

Satz 6: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
Bew.: Wir konstruieren eine unendlich große Menge von Primzahlen wie folgt: Sei p_1 eine Primzahl, etwa $p_1 := 2$. Sind Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ gegeben, betrachte man $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p|n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, setze dann $p_{r+1} := p$. Auf diese Weise können unendlich viele Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ konstruiert werden. $\square$

Direkter Beweis (durch Konstruktion)

Lösung zu Aufgabe 1:

Sei A="Person P darf wählen", B="P ist volljährig", C="P ist dt. Staatsbürger".

(1) $A \Rightarrow B$, Kontrapos.: $\neg B \Rightarrow \neg A$, "Minderjährige dürfen nicht wählen."

Verneinung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$, "Eine Person P darf wählen ohne volljährig zu sein."

(2) $(B \wedge C) \Rightarrow A$, Kontrapos.: $\neg A \Rightarrow \neg(B \wedge C) \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow (\neg B \vee \neg C)$, "P darf nicht wählen. Also ist P minderjährig oder kein deutscher Staatsbürger." Verneinung: $B \wedge C \wedge \neg A$, "P ist volljähriger deutscher Staatsbürger und darf nicht wählen."

(3) $(B \wedge C) \Leftrightarrow A$, für beide Richtungen kann eine Kontrapos. formuliert werden. Eine ist die in (2), die andere ist $(\neg B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A$, "Minderjährige oder Nichtdeutsche dürfen nicht wählen." Verneinung von $(B \wedge C) \Leftrightarrow A$ ist $\neg(B \wedge C \Rightarrow A) \vee \neg(A \Rightarrow B \wedge C)$, "Volljährige deutsche Staatsbürger dürfen nicht wählen, oder Leute, die wählen dürfen, sind weder vollährig noch deutsche Staatsbürger."

Lösung zu Aufgabe 2:

(1) $\neg(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow A) \Leftrightarrow ((A \wedge (B \vee C)) \vee A)$

Logik-regel Nr. 9

$\Leftrightarrow (A \vee A) \wedge (A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow A \wedge (A \vee B \vee C)$

(2) $\neg(A \Rightarrow B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \wedge C$,

Verneinung: $\neg A \vee B \vee \neg C$

(3) $(A \Leftarrow B) \wedge B \Leftrightarrow (B \Rightarrow A) \wedge B \Leftrightarrow (\neg B \vee A) \wedge B$

$\Leftrightarrow (A \vee \neg B) \wedge B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee \underbrace{(\neg B \wedge B)}_{\text{falsch}} \Leftrightarrow A \wedge B$

Verneinung: $\neg A \vee \neg B$

(4) $\neg(A \vee (A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow \neg(A \vee ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)))$

$\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

$\Leftrightarrow \neg A \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A))$

Verneinung: $A \vee ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))$