Übungsblatt Nr. 3, Besprechung am 20.9.2011

Aufgabe 1:

Zeigen Sie den folgenden Satz mit vollständiger Induktion:

$$\forall n, x \in \mathbb{N} : (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)(x - 1) = x^{n+1} - 1.$$

Schreiben Sie den Satz mitsamt Beweis so auf wie in der Vorlesung Beispiel Nr. 16 und 17.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie die binomischen Formeln, d.h. leiten Sie die folgenden Formeln her. Sie dürfen jeweils aber nur die Rechenregeln/Axiome aus der Vorlesung bzw. vorher Bewiesenes dafür verwenden.

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

(4) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Aufgabe 3:

In Definition 18 wurde mit der Aussage

$$\forall c \in \mathbb{N} : \ c|a \wedge c|b \Rightarrow c = 1$$

definiert, wann zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind. Wie kann man diese rein sprachlich ausdrücken? Schreiben Sie die formale Verneinung der Aussage auf und drücken Sie diese ebenfalls sprachlich aus.

Denken Sie daran, dass "$c|a$" und "$c|b$" ebenfalls Abkürzungen für Aussagen sind; diese enthalten einen Existenzquantor. Welche sind das? Wenn man diese Aussagen dann in die Aussage von Definition 18 einsetzt, wie lautet dann die formale Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung?

Lösung zu Aufgabe 1:

Beh.: $\forall n, x \in \mathbb{N}: (1+x+x^2+\ldots+x^n)\cdot(x-1) = x^{n+1}-1$

Bew.: (durch vollständige Induktion nach n)

$n=1$ (Induktionsanfang): $\ell.S. = (1+x)(x-1) \underset{\uparrow \text{bin. Formel}}{=} x^2-1 = r.S.$

$n \rightsquigarrow n+1$ (Induktionsschritt):

$$\begin{aligned} \ell.S.(n+1) &= ((1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+x^n)+x^{n+1})\cdot(x-1) \\ &= \underbrace{(1+\ldots+x^n)\cdot(x-1)}_{(=x^{n+1}-1 \text{ laut Induktionsannahme})} + x^{n+1}\cdot(x-1) \\ &= x^{n+1}-1 + x^{n+1}\cdot(x-1) \\ &= x^{n+1}-1+x^{n+2}-x^{n+1} \\ &= x^{n+2}-1 = x^{(n+1)+1}-1 = r.S.(n+1). \quad \square \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2:

(1) Beh.: $\forall x,y \in \mathbb{R}: (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

Bew.: $\ell.S. = (x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) \overset{Nr.5}{=} (x+y)\cdot x + (x+y)\cdot y$

$\overset{Nr.2}{=} x\cdot(x+y) + y\cdot(x+y) \overset{Nr.5}{=} x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y$

$\overset{Nr.2}{=} x^2+xy+xy+y^2 \overset{Nr.5}{=} x^2+xy\cdot\underbrace{(1+1)}_{=2}+y^2 \overset{Nr.2}{=} x^2+2xy+y^2 = r.S. \quad \square$

(2) Beh.: $\forall x,y \in \mathbb{R}: (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$.

Bew.: Wie bei (1), ersetze dort y durch $-y$. $\square$

(3) Beh.: $\forall x,y \in \mathbb{R}: (x+y)(x-y) = x^2-y^2$.

Bew.: $\ell.S. \overset{Nr.5}{=} (x+y).x-(x+y).y \overset{Nr.2}{=} x(x+y)-y(x+y) \overset{Nr.5}{=} x^2+\underbrace{xy-xy}_{=0}-y^2 = r.S. \quad \square$

(4) Beh.: $\forall x,y \in \mathbb{R}: (x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

Bew.: $\ell.S. = (x+y)(x+y)^2 \underset{\uparrow \text{Teil (1)}}{=} (x+y)\cdot(x^2+2xy+y^2) \underset{\uparrow Nr.5,2}{=} x^3+2x^2y+xy^2+yx^2+2xy^2+y^3 \underset{\uparrow Nr.2\ldots}{=} r.S. \quad \square$

Lösung zu Aufgabe 3:

- Aussage „$\forall c \in \mathbb{N}: (c|a \wedge c|b) \Rightarrow c = 1$"
  bedeutet: „Jede natürliche Zahl c, die a und b teilt, ist (notwendigerweise) gleich 1."
- Gleichwertig: „$\forall c \in \mathbb{N}\setminus\{1\}: \neg c|a \vee \neg c|b$",
  in Worten: „Jede natürliche Zahl $c \neq 1$ teilt a nicht oder b nicht."
- Formale Verneinung: $\exists c \in \mathbb{N}: \neg((c|a \wedge c|b) \Rightarrow c = 1)$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}: (c|a \wedge c|b) \wedge c \neq 1$$
$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}\setminus\{1\}: c|a \wedge c|b,$$

in Worten: „Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, die a und b teilt."

Die Verneinung: „Es gibt keine natürliche Zahl $c \neq 1$, die a und b teilt." ist wieder gleichwertig zur Ursprungsaussage.

Hatten: $c|a \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{Z}: a = cd$,
entsprechend $c|b \Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{Z}: b = ce$.
Eingesetzt: $\forall c \in \mathbb{N}: (\exists d \in \mathbb{Z}: a = cd) \wedge (\exists e \in \mathbb{Z}: b = ce) \Rightarrow c = 1$

Verneinung: $\exists c \in \mathbb{N}: (\exists d \in \mathbb{Z}: a = cd) \wedge (\exists e \in \mathbb{Z}: b = ce) \wedge (c \neq 1)$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\ \exists d \in \mathbb{Z}\ \exists e \in \mathbb{Z}: a = cd \wedge b = ce$$

In Worten:
„Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, eine ganze Zahl d und eine ganze Zahl e mit $a = cd$ und $b = ce$."

Auch möglich:
„Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, eine ganze Zahl d und eine ganze Zahl e, so dass die Gleichungen $a = cd$ und $b = ce$ gelten."