Vorkurs Mathematik, PD Dr. K. Halupczok,
WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik 20.9.2011

Übungsblatt Nr. 4

Bei diesem Übungsblatt können Sie Ihre Lösungen der Aufgaben 1 und 2 freiwillig abgeben und von Ihrem Übungsleiter korrigieren lassen. Dazu können Sie die Lösungen persönlich abgeben in der Übungsgruppe übermorgen, am Donnerstag, den 22.9.2011. Bitte erarbeiten Sie Ihre Lösungen in kleinen Teams (3-5 Personen, notfalls weniger) und schreiben Sie Ihre Namen auf die Lösungsblätter. Die Korrektur erhalten Sie in der Übung am 27.9.2011, wo Sie die Aufgaben mit Ihrem Übungsleiter besprechen können.

Aufgabe 1:

Schreiben Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}$ als Intervall und beweisen Sie Ihre Behauptung:

$$\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |-x^2+1| \geq 2\}$$

Aufgabe 2:

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ fest. Kann man für die rekursiv definierte Folge $f_1 := c$, $f_{n+1} := af_n + b$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ein explizites Bildungsgesetz aufschreiben? Beweisen Sie Ihre aufgestellte Behauptung.

Die folgenden Aufgaben sind zur Besprechung in den Übungsgruppen am Donnerstag, den 22.9.2011, gedacht:

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

$a: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$,	$a(1) = 1$,	$a(2) = 3$,	$a(3) = 3$,	$a(4) = 2$	surj., nicht inj.
$b: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$,	$b(1) = 1$,	$b(2) = 3$,	$b(3) = 3$,	$b(4) = 2$	nicht surj., nicht inj.
$c: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$,	$c(1) = 1$,	$c(2) = 3$,	$c(3) = 4$,	$c(4) = 2$	bijektiv
$d: \{1,2,3,4\} \to \{1,2\}$,	$d(1) = 1$,	$d(2) = 1$,	$d(3) = 2$,	$d(4) = 1$	surj., nicht inj.
$e: \{1\} \to \{1,2,3,4,5\}$,	$e(1) = 5$	injektiv, nicht surjektiv			

Aufgabe 4:

Schreiben Sie die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung: $A := \{x \in \mathbb{R};\ |x| < 3\}$, $B := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 7\}$, $C := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |2x-4| \geq 5\}$, $D := \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R};\ |x-1| \leq 2\}$.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie das Supremum und Maximum der folgenden Mengen reeller Zahlen, falls existent, und geben Sie jeweils die Menge aller oberer Schranken an:

$$A := \{\pi, 1\}, \quad B := \left\{1 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad C := \left\{\frac{x}{1+x};\ x \in \mathbb{R}, x > -1\right\},$$
$$D := \mathbb{N}, \quad E := \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 3\}, \quad F := \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 = 5\}.$$

Lösung zu Aufgabe 5:

- $\sup A = \pi$, $\max A = \pi$, $[\pi, \infty)$
- $\sup B = 1$, $\max B$ ex. nicht, $[1, \infty)$
- $\sup C = 1$, $\max C$ ex. nicht, $[1, \infty)$
- $\sup \mathbb{N}$, $\max \mathbb{N}$ ex. nicht, $\emptyset$
- $\sup E = \sqrt{3}$, $\max E$ ex. nicht, $[\sqrt{3}, \infty)$
- $F = \emptyset \rightsquigarrow \sup F$, $\max F$ ex. nicht, $\mathbb{R}$

$$\boxed{\{x \in \mathbb{R};\ \underbrace{\forall y \in F : y \leq x}_{\text{immer wahr: } \forall y \in \mathbb{R}:\ \underbrace{y \in F}_{\text{falsch für alle } y \in \mathbb{R}} \Rightarrow y \leq x}\} = \mathbb{R}}$$

Lösung zu Aufgabe 4:

- $A = (-3, 3)$, da: $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$
- $B = (-\infty, -7) \cup (7, \infty)$, da:

  $x \in B \Leftrightarrow \neg(|x| \leq 7) \Leftrightarrow \neg(-7 \leq x \leq 7) \Leftrightarrow x < -7 \vee x > 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -7) \vee x \in (7, \infty)$
- $C = (-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, da:

  $x \in C \Leftrightarrow \neg(|2x-4| \geq 5) \Leftrightarrow |2x-4| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x-4 < 5 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \wedge x < \frac{9}{2}$
- $D = (-1, 2)$, da:

  $x \in D \Leftrightarrow x^2 < 4 \wedge |x-1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \wedge -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow x \in \underbrace{(-2,2) \cap (-1,3)}_{= (-1, 2)}$

Lösung zu Aufgabe 1:

Beh.: $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |-x^2+1| \geq 2\} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Beweis: Sei A die Teilmenge der linken Seite der Behauptung.

Dann gilt: $x \in A \Leftrightarrow \neg(|-x^2+1| \geq 2) \Leftrightarrow |-x^2+1| < 2$

$\Leftrightarrow -2 < -x^2+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < -x^2 \wedge \underbrace{-x^2 < 1}_{\text{immer wahr}}$

$\Leftrightarrow 3 > x^2 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. $\square$

Lösung zu Aufgabe 2:

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: f_n \overset{!}{=} c \cdot a^{n-1} + b \cdot \sum_{k=0}^{n-2} a^k$

Bem.: $f_n = \begin{cases} ca^{n-1} + b \cdot \frac{a^{n-1}-1}{a-1}, & \text{falls } a \neq 1 \\ c + b(n-1), & \text{falls } a = 1 \end{cases}$

Beweis (durch vollständige Induktion):

$\underline{n=1}$: $c \cdot a^0 + b \cdot \sum_{k=0}^{-1} a^k = c + 0 = c = f_1$ ✓

$\underline{n \rightsquigarrow n+1}$: $f_{n+1} \underset{\text{Def. von } f}{=} af_n + b \underset{\text{Ind.ann.}}{=} a\left(ca^{n-1} + b \cdot \sum_{k=0}^{n-2} a^k\right) + b$

$= ca^n + b \sum_{k=0}^{n-2} a^{k+1} + b = ca^n + b \sum_{k=1}^{n-1} a^k + b = ca^{(n+1)-1} + b \cdot \sum_{k=0}^{(n+1)-2} a^k$. $\square$