Lösungsskizze Blatt 5:

Aufgabe 1: $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ fest.

- $a^{\ln(x^b)} = c \iff e^{\ln(x^b)\ln a} = c \iff e^{b \ln a \ln x} = e^{\ln c}$

  $\iff b \ln a \ln x = \ln c \underset{a \neq 1}{\iff} \ln x = \frac{\ln c}{b \ln a} \iff x = \exp\left(\frac{\ln c}{b \ln a}\right) \rightsquigarrow \mathbb{L}_1 = \left\{\exp\left(\frac{\ln c}{b \ln a}\right)\right\}$ für $a \neq 1$,

  sonst $(a=1)$: $\mathbb{L}_1 = \begin{cases} \mathbb{R}_{>0}, & c=1 \\ \emptyset, & c \neq 1 \end{cases}$

- $x^x = 1 \iff e^{x \ln x} = 1 = e^0 \iff x \ln x = 0 \iff x = 0 \lor \ln x = 0$

  $\iff x = 0 \lor x = 1 \rightsquigarrow \mathbb{L}_2 = \{0, 1\}$

- $(\ln a)^x = b \iff e^{x \ln(\ln a)} = b = e^{\ln b} \iff x \ln(\ln a) = \ln b \rightsquigarrow \mathbb{L}_3 = \left\{\frac{\ln b}{\ln(\ln a)}\right\}$

  falls $a \neq e$, sonst $(a=e)$: $\mathbb{L}_3 = \begin{cases} \mathbb{R}, & b=1 \\ \emptyset, & b \neq 1 \end{cases}$

- $\exp(cx)^a = 2^b \iff \exp(acx) = \exp(b \ln 2) \iff acx = b \ln 2$

  $\iff x = \frac{b}{ac} \ln 2 \rightarrow \mathbb{L}_4 = \left\{\frac{b}{ac} \ln 2\right\}$

- $\ln\left(\frac{a}{e^{x-c}}\right) = b \iff \frac{a}{e^{x-c}} = e^b \iff a = e^{b+x-c}$

  $\iff x + b - c = \ln a \iff x = \ln a - b + c \rightsquigarrow \mathbb{L}_5 = \{\ln a - b + c\}$

- $x^{2 \ln a} = 2^b \iff e^{2 \ln a \ln x} = e^{b \ln 2} \iff 2 \ln a \ln x = b \ln 2$

  $\underset{(a \neq 1)}{\iff} \ln x = \frac{b \ln 2}{2 \ln a} \iff x = \exp\left(\frac{b \ln 2}{2 \ln a}\right) \rightsquigarrow \mathbb{L}_6 = \left\{\exp\left(\frac{b \ln 2}{2 \ln a}\right)\right\}$, falls $a \neq 1$,

  sonst $(a=1)$: $\mathbb{L}_6 = \begin{cases} \mathbb{R}_{>0}, & b=0, \\ \emptyset, & b \neq 0. \end{cases}$

Aufgabe 2:

- $a_n = (-1)^{n^2} \cdot \frac{1}{n}$ Konvergiert gegen 0, da $\frac{1}{n}$ Nullfolge und $(-1)^{n^2}$ beschränkt
- $b_n = \begin{cases} n^2 \cdot \frac{1}{1-n}, & n \in \{A, \dots, B\} \\ 100, & \text{sonst (d.h. } n < A \lor n > B), \end{cases}$ Konvergiert gegen 100,

  da die Folge für $n \geq B+1$ Konstant $(=100)$ bleibt
- $c_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ divergiert: $\forall c\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall n_0\ \exists n > n_0: |c_n - c| \geq \varepsilon_0$.

  Wähle $\varepsilon_0 = 1$. Für n gerade und groß ist $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq c+1$, also $|c_n - c| = \left(\frac{3}{2}\right)^n - c \geq \varepsilon_0$

  Vollst. Induktion!
- $d_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ Konvergiert gegen 0: Sei $\varepsilon > 0$, dann $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann: $|d_n - 0| = \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \varepsilon$. □

Aufgabe 3:

(a) Beh.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^2$ ist stetig in $c=0$.

Bew. (ε-δ-Kriterium): Z.z.: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}: |x|<\delta \Rightarrow |x^2|<\varepsilon$.

Die zu erfüllende Ungl. ist $|x|<\sqrt{\varepsilon}$ und ist für $\delta:=\sqrt{\varepsilon}$ und alle $x\in\mathbb{R}$ erfüllt. $\square$

(b) Beh.: $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$, $f(x):=\frac{1}{x}$ ist stetig in $c=1$.

Bew. (Folgenkriterium): Z.z.: $\forall x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1: \quad \frac{1}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen 1 konvergiert.

Dann konvergiert $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{1}=1$ (nach GWRegel Nr. 3). $\square$

(c) Beh.: $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x):=\frac{1}{x}$ ist nicht stetig fortsetzbar in $x=0$.

Bew.: • (ε-δ) Z.z.: $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists \varepsilon_0>0\ \forall \delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}: |x|<\delta \wedge \left|\frac{1}{x}-a\right|\geq\varepsilon_0$

Zu $a\in\mathbb{R}$ setze $\varepsilon_0:=1$. Sei $\delta>0$. Seien $n_1, n_2\in\mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\delta}<n_1$ und $n_2>|a|+\varepsilon_0$. Dann setze $n:=\max\{n_1,n_2\}$ und $x:=\frac{1}{n}$.

Es folgt: $|x|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_1}<\delta$ und $\left|\frac{1}{x}-a\right|=|n-a|\geq n-|a|>n_2-|a|>|a|+\varepsilon_0-|a|=\varepsilon_0$ $\square$

• (Folgenkrit.) Z.z.: $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists$ Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $x_n\neq 0$, mit $\underbrace{\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq a}_{\text{d.h. (GW ex. nicht) oder (GW ex. und ist } \neq a)}$

Wähle $x_n:=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$, dann ist $f(x_n)=n$ divergent. $\square$

Aufgabe 4:

$$\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{1-i^2}=\frac{1+i}{1+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{2}=\frac{1}{2}(1-2i+i^2)=\frac{1}{2}(-2i)=-i$$

$$\frac{(1+2i)^2}{2+3i}=\frac{(1+4i+4i^2)(2-3i)}{2^2+3^2}=\frac{1}{13}(-3+4i)(2-3i)=\frac{1}{13}(-6+12+9i+8i)=\frac{6}{13}+\frac{17}{13}i$$

$$\frac{1+2i}{(2+3i)^2}=\frac{1}{13^2}\cdot(1+2i)(2-3i)^2=\frac{1}{13^2}(1+2i)(4-12i-9)=\frac{-1}{13^2}(1+2i)(5+12i)=\frac{-1}{13^2}(5-24+10i+12i)=\frac{19}{13^2}-\frac{22}{13^2}i$$

$$\frac{(4-i)^2}{(2+i)^2}=\frac{(4-i)^2(2-i)^2}{(4+1)^2}=\frac{1}{25}\cdot(8-1-4i-2i)^2=\frac{1}{25}(7-6i)^2$$

$$=\frac{1}{25}(49-36-12\cdot 7i)=\frac{13}{25}-\frac{84}{25}i$$